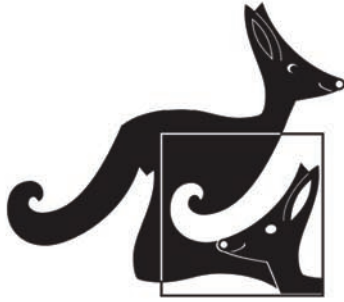


به نام خدا



راه حل مسابقه‌ی بین‌المللی ریاضیات کانگورو ۱۳۹۶  
پایه‌های سوم دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

راه حل مسئله‌های سه امتیازی

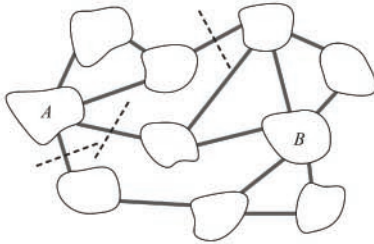
۱. (۳)

$$\frac{20 \times 17}{2+0+1+7} = \frac{20 \times 17}{10} = 2 \times 17$$

۲. (۱)

$$\frac{87}{1} \times 2 = 174 \text{ cm}$$

۳. (۳)



دبیرخانه ریاضیات  
کانگورو در ایران



مؤسسه  
فرهنگی  
فاطمی

۴. (۱)

$$\frac{75}{100}a = \frac{40}{100}b \Rightarrow 15a = 8b$$

۵. (۳) تقعر خم به بالا است، پس حداکثر یکی از (۳) و (۵) می‌توانند بخشی از خم باشند. طول رأس منفی است؛ پس ریشه‌ای که روی شاخه‌ی نزولی قرار دارد نمی‌تواند مثبت باشد و در نتیجه، (۳) بخشی از خم نیست.

۶. (۲)  $OB$  و  $OC$  شعاع دایره هستند؛ پس مثلث  $OBC$  متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه، مساحت قطاع  $OBC$  (که با مساحت قطاع  $OAX$  برابر است) یک‌ششم مساحت دایره است.

۷. (۱) برای ساختن هر کدام از مکعب‌مستطیل‌های (۲)، (۳)، (۴) یا (۵) اقلأً یک مکعب‌مستطیل  $1 \times 1 \times 4$  تک‌رنگ لازم داریم.

۸. (۳) اگر  $y < 0$  آنگاه  $y > 2$ ؛ پس نمودار از ربع سوم نمی‌گذرد.

۹. (۲) اگر  $b$  مهره‌ی آبی و  $r$  مهره‌ی قرمز در جعبه داشته باشیم، احتمال بیرون آمدن یک مهره‌ی آبی برابر است با  $\frac{b}{r+b}$ ؛ پس احتمال بیرون آمدن تیله‌ی آبی از جعبه‌ها به ترتیب برابر است با  $\frac{1}{18}$ ،  $\frac{1}{6}$ ،  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{3}$ . این عددها به ترتیب به اندازه‌ی  $\frac{1}{18}$ ،  $\frac{1}{6}$ ،  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{3}$  از  $\frac{1}{3}$  بیش‌تر هستند؛ پس دومی از بقیه بزرگ‌تر است.

۱۰. (۲)  $x^3 = x$  سه جواب متمایز دارد و هر کدام از  $x^4 = x$  و  $-x^4 = x$  و  $x^2 = x$  دو جواب، و  $-x = x$  فقط یک جواب.

### راه‌حل مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (۱) اندازه‌ی پاره‌خط‌های  $AB$ ،  $BC$  و  $CA$  به ترتیب برابر است با  $2 + 3$ ،  $2 + 1$  و  $1 + 3$ ؛ پس مثلث  $ABC$  در رأس  $C$  قائمه است و مساحتش برابر است با  $6 = 3 \times 4 \times \frac{1}{2}$ .

۱۲. (۲)

$$\frac{p}{q} < p < p \times q < q < p + q$$

۱۳. (۵) فرض کنید  $r_1$  و  $h_1$  شعاع قاعده و ارتفاع  $A$  و  $r_2$  و  $h_2$  شعاع قاعده و ارتفاع  $B$  هستند. در این صورت،  $r_2 = 1/11 r_1$  و  $\pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2$ ؛ پس

$$\begin{aligned} r_1^2 h_1 &= (1/11 r_1)^2 h_2 \\ h_1 &= 1/121 h_2 \end{aligned}$$

۱۴. (۴)

۱۵. (۲) تنها حالتی که نمی‌توانیم  $2017$  را بسازیم، حالتی است که چهاروجهی که روی زمین قرار می‌گیرند یکسان هستند (بررسی کنید!)؛ پس احتمال مطلوب برابر است با

$$1 - \frac{4}{44} = \frac{63}{64}$$

۱۶. (۴) اگر  $5$  ریشه‌ی چندجمله‌ای باشد، باید

$$0 = 5 \times 5^3 + a \times 5^2 + b \times 5 + 24 = 5k + 24$$

که ممکن نیست.

۱۷. (۵) فرض کنید تعداد دکمه‌های روی ضلع بزرگ‌ترین مربع  $n$  است؛ پس  $n$  باید بزرگ‌ترین عددی باشد که  $2017 \leq n^2$  و در نتیجه  $n = 44$ . در مربع‌هایی که ضلعشان از تعداد زوجی دکمه تشکیل شده، تعداد دکمه‌های سیاه با تعداد دکمه‌های سفید برابر است؛ پس  $968$  دکمه از  $1009$  دکمه‌ی سیاه و  $968$  دکمه از  $1008$  دکمه‌ی سفید استفاده شده‌اند.

۱۸. (۳) فرض کنید  $A$  عددی با این خاصیت است که حاصل جمع رقم‌های  $A$  بر  $7$  بخش‌پذیر است و حاصل جمع رقم‌های  $A + 1$  هم بر  $7$  بخش‌پذیر است.

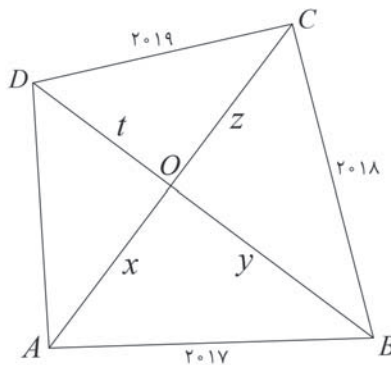
رقم یکان  $A$  باید ۹ باشد؛ زیرا در غیر این صورت، حاصل جمع رقم‌های  $A+1$  دقیقاً یک واحد از حاصل جمع رقم‌های  $A$  بیش‌تر است فرض کنید دقیقاً  $n$  رقم ۹ در سمت راست  $A$  هستند، و  $B$  را برابر با عددی تعریف کنید که از حذف این  $n$  رقم از سمت راست  $A$  به دست می‌آید؛ مثلاً اگر  $A = ۲۳۴۴۹۹۹۹$  آنگاه  $n = ۴$  و  $B = ۲۳۴۴$ . اگر حاصل جمع رقم‌های  $B$  برابر  $S$  باشد، حاصل جمع رقم‌های  $A$  برابر است با  $S + 9n$  و حاصل جمع رقم‌های  $A+1$  برابر است با  $S+1$ . به این ترتیب، باید  $S+1$  و  $9n-1$  هر دو به ۷ بخش پذیر باشند. کوچک‌ترین  $A$  با این خاصیت باید کم‌ترین تعداد ارقام را داشته باشد؛ پس باید  $n = ۴$  و  $B = ۶$  که یعنی  $A = ۶۹۹۹۹$ .

۱۹. (۴) چون قطر‌ها بر هم عمودند، می‌توانیم بنویسیم

$$x^2 + y^2 = ۲۰۱۷^2$$

$$y^2 + z^2 = ۲۰۱۸^2$$

$$z^2 + t^2 = ۲۰۱۹^2$$



به این ترتیب

$$\begin{aligned} AD^2 &= x^2 + t^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - (y^2 + z^2) \\ &= 2017^2 + 2019^2 - 2018^2 \\ &= 2017^2 + 2019 + 2018 \\ &= 2017^2 + 2 \times 2017 + 3 \\ &= (2017 + 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

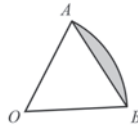
۲۰. (۴) ممکن نیست که هم «از ۵۰ بزرگ‌تر است» راست باشد و هم «از ۳۰ کوچک‌تر است». فرض کنید «از ۵۰ بزرگ‌تر است» دروغ است؛ پس «یکی از رقم‌هایش ۲ است»، «زوج است»، «از ۳۰ کوچک‌تر است»، «بر ۳ بخش‌پذیر نیست»، و «یکی از رقم‌هایش ۷ است». چون عدد از ۳۰ کوچک‌تر است و یکی از رقم‌هایش ۲ و یکی ۷، باید عدد ۲۷ باشد که بر ۳ بخش‌پذیر است؛ پس «از ۵۰ بزرگ‌تر است» راست است و در نتیجه «از ۳۰ کوچک‌تر است» دروغ است. به این ترتیب، «رقم ۲ ندارد»، «از ۵۰ بزرگ‌تر است»، «زوج است»، «از ۳۰ کوچک‌تر نیست»، «بر ۳ بخش‌پذیر است»، و «یکی از رقم‌هایش ۷ است». چون دورقمی است و زوج، ۷ رقم دهگان است و در نتیجه باید ۷۲ یا ۷۸ باشد، که چون ۲ ندارد باید ۷۸ باشد.

راه حل مسئله‌های پنج امتیازی

۲۱. (۳) فرض کنید  $a$  رقم یکان عدد است و  $b$  عدد به دست آمده از حذف یکان؛ پس عدد اولیه برابر است با  $10b + a$  و در نتیجه  $b = \frac{1}{11}(10b + a)$  که یعنی  $a = 4b$ . تنها عددهایی که در این شرایط صدق می‌کنند عبارت‌اند از ۱۴ و ۲۸.

۲۲. (۵) فرض کنید مثلث  $OAB$  متساوی الاضلاع به ضلع واحد است و کمان  $AB$  بخشی از دایره‌ی به مرکز  $O$  و شعاع واحد. مساحت قطاع یک‌ششم مساحت دایره است و مساحت مثلث برابر است با  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ؛ پس مساحت ناحیه‌ی سایه‌خورده برابر است با  $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ . گل از دوازده‌تا از این ناحیه‌ها تشکیل شده است؛ پس مساحت گل برابر است با

$$۱۲ \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = ۲\pi - ۳\sqrt{3}$$



۲۳. (۵) فرض کنید  $f(x) = \frac{x-1}{x}$ ؛ در این صورت  $a_{n+1} = f(a_n)$  می‌توانیم بنویسیم

$$f(f(x)) = -\frac{1}{x-1}, \quad f(f(f(x))) = x$$

پس

$$a_{۲۰۱۷} = a_{۲۰۱۴} = a_{۲۰۱۱} = \dots = a_۱ = ۲۰۱۷$$

۲۴. (۴) حجم هر کدام از هرم‌های بریده شده  $\frac{1}{8}$  حجم هرم بزرگ است؛ پس حجم جسم به دست آمده برابر است با  $\frac{1}{8} = ۱ - ۴ \times \frac{1}{8}$  حجم چهاروجهی اولیه.

۲۵. (۵) فرض کنید  $x$  و  $y$  ضلع‌های زاویه‌ی قائمه هستند و  $t$  وتر مثلث است. چون  $x^2 + y^2 = z^2 = ۱۲۸$ ،  $۲z^2 = ۸$  یعنی  $z = ۸$  و در نتیجه  $x + y = ۱۰$  و  $x^2 + y^2 = ۶۴$  می‌توانیم بنویسیم

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x^2 + y^2)) = \frac{1}{4}(۱۰۰ - ۶۴) = ۹$$

۲۶. (۴)

۲۷. (۴) فرض کنید عدد خانه‌ی وسط  $x$  است. در این صورت، حاصل جمع از  $9x + 4 + 8$  بیش‌تر نیست و از  $9x - 4 - 8$  کم‌تر نیست، و  $x$  حاصل جمع یا هر دو زوج هستند و یا هر دو فرد. به این ترتیب، باید  $x$  زوج باشد و  $12 \leq 9x + 12 \leq 500 \leq 9x - 12$  که یعنی  $\frac{512}{9} \leq x \leq \frac{488}{9}$  و در نتیجه  $x = 55$  یا  $x = 56$ ، و چون حاصل جمع زوج است،  $x = 56$ .

۲۸. (۱) اگر  $x < 0$  آنگاه  $|x| = -x$  و در نتیجه  $y = 5$  که نتیجه می‌دهد  $x = 10$  که ممکن نیست؛ پس  $x \geq 0$ . اگر  $y \geq 0$  آنگاه  $|y| = y$  که نتیجه می‌دهد  $x = 10$  و در نتیجه، باید  $y = -15$  که ممکن نیست. به این ترتیب، باید

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$$

که یعنی  $x = 4$  و  $y = -3$ .

۲۹. (۵) توجه کنید که عددهای سه‌رقمی که توانی از ۲ هستند عبارت‌اند از ۲۷،

$$2^9 = 8^3 \quad \text{و} \quad 2^8 = 4^4 = 16^2$$

۳۰. (۱) اگر همه‌ی شرکت‌کنندگان در مهمانی دروغ‌گو باشند، حداکثر ۱۶ نفر ممکن است راست‌گو باشند. اگر اقلاً یکی از مهمان‌ها هم راست‌گو باشد، یکی از دو نفر کنارش راست‌گو است و دیگری دروغ‌گو. نفر بعدی دروغ‌گو باید راست‌گو باشد (وگرنه جمله‌ی او راست می‌شود) و نفر بعدی راست‌گو باید دروغ‌گو باشد (وگرنه جمله‌ی او دروغ می‌شود)؛ پس تعداد شرکت‌کنندگان در مهمانی باید مضرب ۳ باشد و دو راست‌گو و یک دروغ‌گو با هم نشسته باشند. به این ترتیب، حداقل تعداد مهمان‌ها  $1002$  نفر است که  $668 = 1002 \times \frac{2}{3}$  نفرشان راست‌گو هستند، و در نتیجه حداکثر تعداد راست‌گوها برابر است با

$$668 + (2017 - 1002) = 1683$$