

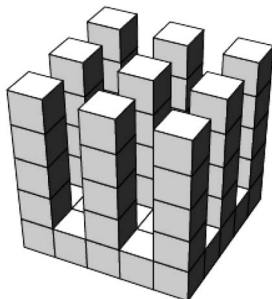


مسابقه‌ی ریاضی کانگورو ۲۰۱۴

مسئله‌های سه امتیازی



۱. از مکعبی که با ۱۲۵ مکعب $1 \times 1 \times 1$ ساخته شده است، تعدادی مکعب $1 \times 1 \times 1$ جدا می‌کنیم تا به جسم زیر برسیم. این جسم، از چند ستون هم‌ارتفاع که روی یک صفحه‌ی افقی قرار گرفته‌اند تشکیل شده است. براء ساختن این جسم، چند مکعب $1 \times 1 \times 1$ را از مکعب بزرگ جدا کرده‌ایم؟



(۱) ۵۶ (۲) ۶۰ (۳) ۶۴ (۴) ۶۸ (۵) ۸۰

۲. امروز روز تولد مریم، میترا و میناست. مجموع سن آن‌ها ۴۴ سال شده است. دفعه‌های بعدی که مجموع سن آن‌ها عددی دو رقمی با رقم‌های برابر شود، سن‌ها آن‌ها روی هم چند سال خواهند بود؟

(۱) ۵۵ (۲) ۶۶ (۳) ۷۷ (۴) ۸۸ (۵) ۹۹

۳. اگر $a^b = \frac{1}{4}$ مقدار a^{-3b} چه قدر است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴) ۶ (۵) $\frac{1}{6}$

۴. ۴۸ توپ در سه سبد با اندازه‌های مختلف وجود دارند. مجموع تعداد توپ‌های دو سبد کوچک و بزرگ، دو برابر تعداد توپ‌های سبد متوسط است. همچنین تعداد توپ‌های سبد کوچک، نصف تعداد توپ‌های داخل سبد متوسط است. چند توپ داخل سبد بزرگ وجود دارد؟

(۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۳۰ (۵) ۳۲

۵. $\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$ برابر است با

(۱) 2^{2011} (۲) 2^{2012} (۳) 2^{2013} (۴) ۱ (۵) ۲

۶. کدامیک از عبارتهای زیر بر $1 + b$ بخش پذیر نیست؟

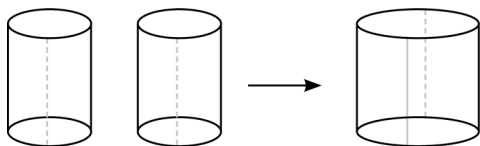
(۱) $2b + 2$ (۲) $b^2 - 1$ (۳) $b^2 + b$ (۴) $-b - 1$ (۵) $b^2 + 1$

۷. حاصل $(555)^2 \times (222)^5$ چند رقم دارند؟

(۱) ۲۲ (۲) ۵۵ (۳) ۷۷ (۴) ۱۱۰ (۵) ۱۱۱

۸. آرش، ایمیلی دارد که فقط ۴ تا از دوستانش نشانی‌اش را دارند. امروز آرش ۸ نامه دریافت کرد. کدامیک از گزینه‌های زیر حتماً درست است؟
(۱) آرش از هر یک از دوستانش ۲ نامه دریافت کرده است.

- (۲) امکان ندارد که آرش از یکی از دوستانش ۸ نامه دریافت کرده باشد.
 (۳) آرش از هر یک از دوستانش دست‌کم یک نامه دریافت کرده است.
 (۴) آرش از یکی از دوستانش دست‌کم دو نامه دریافت کرده است.
 (۵) آرش از هر کدام از دو نفر از دوستانش دست‌کم دو نامه دریافت کرده است.
۹. مانند شکل زیر، دو استوانه‌ی برابر را از روی نقطه چین‌ها می‌بریم. سپس آن‌ها را به هم می‌چسبانیم و یک استوانه‌ی بزرگ‌تر می‌سازیم. نسبت حجم استوانه‌ی بزرگ‌تر به حجم استوانه‌های کوچک‌تر برابر است با



- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) p (۴) ۴ (۵) ۸

۱۰. رقم‌های ۲۰۱۴ متفاوت‌اند و رقم سمت راست، از مجموع سه رقم سمت چپ بزرگ‌تر است. آخرین بار، عدد چه سال‌ی این چنین بوده است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲۱۵ (۳) ۳۰۵ (۴) ۳۹۵ (۵) ۴۸۵

مسئله‌های چهار امتیازی



۱۱. جعبه‌ای به ابعاد $a \times b \times c$ داریم که $a < b < c$. اگر a , b یا c را افزایش دهیم، حجم جعبه زیاد می‌شود. در کدام یک از حالت‌های زیر، حجم جعبه بیش‌تر افزایش می‌یابد؟

- (۱) در حالتی که a افزایش یابد.
 (۲) در حالتی که b افزایش یابد.

۳) در حالتی که c افزایش یابد.

۴) افزایش حجم در هر سه حالت «۱»، «۲» و «۳» یکسان است.

۵) به مقدار a ، b و c بستگی دارد.

۱۲. در یک مسابقه‌ی فوتبال، تیم برنده ۳ امتیاز، و تیم بازنده، امتیاز می‌گیرد. اگر

هم بازی مساوی شود، هر یک از دو تیم، ۱ امتیاز می‌گیرد. ۴ تیم A ، B ، C و

D در یک تورنمنت فوتبال شرکت کردند. در این تورنمنت هر تیم با هر یک از

سه تیم دیگر یک بار مسابقه داد. در انتهای تورنمنت، تیم A ، ۷ امتیاز و هر یک

از تیم‌های B و C ، ۴ امتیاز داشتند. تیم D چند امتیاز کسب کرده است؟

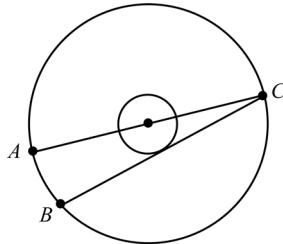
۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۴

۱۳. نسبت شعاع‌های دو دایره‌ی هم‌مرکز زیر، برابر $\frac{1}{3}$ است. AC قطر دایره‌ی بزرگ‌تر،

و BC وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر است که به دایره‌ی کوچک‌تر مماس شده است.

اگر طول AB برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد، شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر چند سانتی‌متر

است؟



۱) ۱۳ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴ ۵) ۲۶

۱۴. چند سه‌تایی مرتب مانند (a, b, c) از عددهای صحیح وجود دارند که $a >$

$$b > 1 \text{ و } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1 \text{ ؟}$$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) بی‌شمار

۱۵. a ، b و c عددهایی حقیقی و مخالف صفر، و n عدد طبیعی است. می‌دانیم

$2c^{3n+2} - 1c^{2n-1} + 2b^{2n} + 2a^{2n+3} - 2(-2)^{2n+3}$ و $2c^{3n-4} + 6e^{2n+1} + 2a^{4n+2} + 2(-3)^{2n+2}$ علامت

یکسانی دارند. کدام یک از گزینه‌های زیر، حتماً درست است؟

- (۱) $a > 0$ (۲) $b > 0$ (۳) $c > 0$ (۴) $a < 0$ (۵) $b < 0$

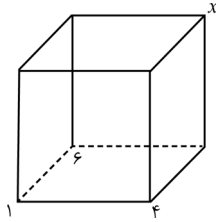
۱۶. شش هفته از $n!$ ثانیه تشکیل شده است. n برابر است با

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۰ (۵) ۱۲

۱۷. هر یک از عددهای ۱ تا ۸ را روی یکی از رأس‌های یک مکعب نوشته‌ایم طوری

که مجموع عددهای روی رأس‌های هر وجه، عددی ثابت باشد. عددهای ۱، ۴

و ۶ مانند شکل زیر روی رأس‌های مکعب قرار گرفته‌اند. x چه عددی است؟



- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷ (۵) ۸

۱۸. روی یک بسته پنیر خامه‌ای، این دو عبارت نوشته شده است: «۲۴٪ چربی» و

«۶۴٪ چربی» در ماده‌ی خشک. چند درصد از این پنیر از آب تشکیل شده

است؟

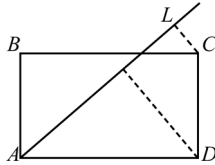
- (۱) ۸۸٪ (۲) ۶۲٫۵٪ (۳) ۴۹٪ (۴) ۴۲٪ (۵) ۳۷٫۵٪

۱۹. رأس A از مستطیل $ABCD$ روی خط l قرار دارد. فاصله‌ی نقطه‌ی C از

خط l برابر ۲ سانتی‌متر و فاصله‌ی نقطه‌ی D از این خط برابر ۶ سانتی‌متر

است. اگر بدانیم طول AD دو برابر طول AB است، طول AD چند سانتی‌متر

است؟



۴√۳ (۵) ۱۶ (۴) ۱۴ (۳) ۱۲ (۲) ۱۰ (۱)

۲۰. تابع خطی f را با ضابطه‌ی $f(x) = ax + b$ در نظر بگیرید. اگر بدانیم $f(f(f(1))) = ۲۹$ و $f(f(f(0))) = ۲$ ، مقدار a را به دست آورید.

۵ (۵) ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

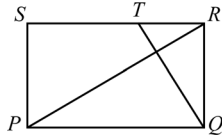
مسئله‌های پنج امتیازی



۲۱. ۱۰ عدد طبیعی متمایز داریم که دقیقاً ۵ تا از آن‌ها بر ۵، و دقیقاً ۷ تا از آن‌ها بر ۷ بخش پذیرند. بزرگ‌ترین عدد از میان این ۱۰ عدد را M می‌نامیم. کم‌ترین مقدار ممکن برای M کدام است؟

۱۰۵ (۱) ۷۷ (۲) ۷۵ (۳) ۶۳ (۴) ۵ هیچ‌کدام (۵)

۲۲. در شکل زیر $PQRS$ یک مستطیل است. نقطه‌ی T وسط SR و QT بر قطر PR عمود است. نسبت PQ به QR برابر است



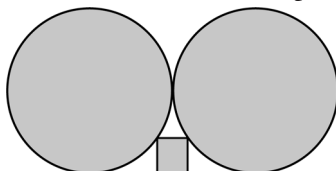
۲ (۱) √۳ (۲) ۳/۴ (۳) √۲ (۴) ۵/۴ (۵)

۲۳. ۹ کانگورو داریم. هر یک از آن‌ها را با یکی از رنگ‌های طلایی و قره‌ای رنگ می‌کنیم. اگر سه تا از این کانگورها را به تصادف انتخاب کنیم، ۲/۳ احتمال دارد

که هیچ یک از این سه کانگورو، طلایی نباشد. چند کانگوروی طلایی داریم؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶ (۵) ۸

۲۴. در شکل زیر، یک مربع و دو دایره به شعاع ۱ سانتی متر رسم شده است. طول ضلع مربع چند سانتی متر است؟



- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{1}{5}$ (۵) $\frac{1}{4}$

۲۵. می خواهیم تعدادی عدد بنویسیم طوری که هیچ کدام از آن ها از 10° بزرگ تر نباشند، همچنین می خواهیم حاصل ضرب این عددها بر 54 بخش پذیر نباشد. حداکثر چند عدد با این شرایط می توانیم بنویسیم؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۷ (۳) ۶۸ (۴) ۶۹ (۵) ۹۰

۲۶. دو چند ضلعی منتظم به طول ضلع ۱ سانتی متر در دو طرف ضلع مشترک شان، AB رسم شده اند. یکی از آن ها ۱۵ ضلعی $ABCD \dots$ و دیگری n ضلعی $ABZX \dots$ است. می دانیم $CZ = 1$. n کدام است؟

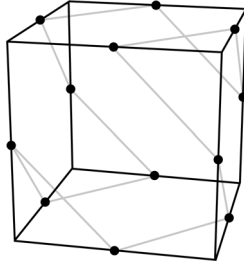
- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶ (۵) ۱۸

۲۷. در معادله های $1024^n + 1 = (2014 + m)^n = k$ ، می دانیم m ، n و k عددهایی طبیعی اند. m چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) بی شمار

۲۸. در شکل زیر، وسط یال های مکعبی را به هم وصل کرده ایم و یک چند ضلعی ساخته ایم. در این چند ضلعی هم مانند هر چند ضلعی دیگری، هر زاویه ی

داخلی برابر زاویه‌ای است که دو ضلع کنار هم با یکدیگر می‌سازند. مجموع زاویه‌های این چند ضلعی، چند درجه است؟



$$1800 \quad (5) \quad 1440 \quad (4) \quad 1200 \quad (3) \quad 1080 \quad (2) \quad 720 \quad (1)$$

۲۹. در مورد تابع $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ می‌دانیم $f(4) = 6$ و $f(x) = (x-3)f(x+1)$. مقدار $f(4)f(7)f(10) \cdots f(2011)f(2014)$ را به دست آورید.

$$2014 \quad (2) \quad 2013 \quad (1)$$

$$2013! \quad (4) \quad 2013 \times 2014 \quad (3)$$

$$2014! \quad (5)$$

۳۰. در جنگل‌های سرزمین عجایب، سه نوع حیوان زندگی می‌کنند: شیر، گرگ و بز. شیرها، هم می‌توانند گرگ بخورند و هم بز. گرگ‌ها فقط بز می‌خورند. این جنگل‌ها، در سرزمین عجایب واقع‌اند؛ پس باید جنگل‌های عجیبی باشند: در این جنگل‌ها، اگر گرگی بز بخورد، به شیر تبدیل می‌شود. همچنین اگر شیری گرگ بخورد به بز، و اگر بز بخورد به گرگ تبدیل می‌شود. در یکی از این جنگل‌ها، ۱۷ بز، ۵۵ گرگ و ۶ شیر زندگی می‌کردند. بعد از مدتی در این جنگل هیچ حیوانی نمی‌تواند دیگری را بخورد. در چنین زمانی حداکثر چند حیوان در جنگل زندگی می‌کنند؟

$$35 \quad (5) \quad 23 \quad (4) \quad 17 \quad (3) \quad 6 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$