

راه حل مسئله‌های ریاضیات کانگورو ۱۳۹۴

پایه‌های هفتم و هشتم

پاسخ مسئله‌های سه امتیازی

۱. (۵)

۲. (۲) دو برابر عرض هر کدام از مستطیل‌های کوچک برابر ۱۰ cm است؛ پس طول مستطیل بزرگ برابر است با $۱۰ + ۱۰ = ۲۰$ cm.

۳. (۵)

$$۱۰۰۰ = ۲ \times ۵۰۰$$

۴. (۱)

۵. (۴) ۲۰۱۴ به ۴ بخش پذیر نیست.

۶. (۱)

$$۱۳۰ - ۳۵ = ۹۵$$

۷. (۳)

۸. (۴) محیط هر کدام از مثلث‌ها برابر است با $۲۷ = ۱۱ + ۱۰ + ۶$ ؛ پس طول هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر است با $۲۷ \div ۳ = ۹$.

۹. (۳) سنجاب باید در دایره‌ی به شعاع پنج متر به مرکز درختش باشد و در ضمن نباید در دایره‌ی به شعاع پنج متر به مرکز لانه‌ی سگ برود.

۱۰. (۴) در پنج ثانیه، دو چرخه $۵ \times ۵ = ۲۵$ متر طی می‌کند که برابر است با $۲۵ \times ۱۰۰ = ۲۵۰۰$ سانتی‌متر؛ پس هر چرخ $۲۵۰۰ \div ۱۲۵ = ۲۰$ دور کامل می‌چرخد.

پاسخ مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (۲) باید هفت پسر و دوازده دختر در کلاس باشند.

۱۲. (۳) مثلث سایه‌خورده‌ی پایینی با مثلث سفید مربع بالایی برابر است.

۱۳. (۲) توجه کنید که حاصل جمع همه‌ی عددها برابر ۲۴ است؛ پس باید بتوانیم $+۱۲$ و -۱۲ به دست بیاوریم. چون ۲ اول مثبت است، کافی است دو $+$ قبل از دو تا از ۵ها بگذاریم و بقیه‌ی *ها را به $-$ تبدیل کنیم.

۱۴. (۴) پانزده لیتر برابر است با $۱۵۰۰۰ = ۱۵ \times ۱۰۰۰$ سانتی‌متر مکعب. چون هر متر مربع برابر است با $۱۰۰ \times ۱۰۰ = ۱۰۰۰۰$ سانتی‌متر مربع؛ پس در هر متر مربع آب باید $۱۵۰۰۰ \div ۱۰۰۰۰ = ۱٫۵$ سانتی‌متر بالا آمده باشد.

۱۵. (۵) این ده شاخه دست‌کم $۲۰ = ۲ \times ۱۰$ برگ دارند و هر شاخه‌ی پنج برگی سه برگ به این تعداد اضافه می‌کند؛ پس تعداد کل برگ‌ها منتهای ۲۰ باید مضربی از ۳ باشد. هیچ‌کدام از عددهای ۳۷، ۳۹، ۴۵ یا ۳۱ این خاصیت را ندارند.

۱۶. (۳) فرض کنید میانگین نمره‌ی دانش‌آموزان رد شده برابر m است. در این صورت

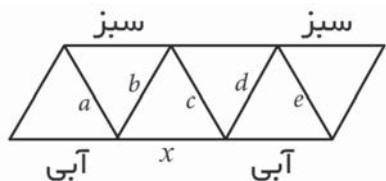
$$\frac{۶۰}{۱۰۰} \times ۸ + \frac{۴۰}{۱۰۰} \times m = ۶$$

و در نتیجه $m = ۳$.

۱۷. (۳) مساحت مثلث تیره‌تر، که برابر است با اختلاف مساحت مربع اصلی و پنج ضلعی، برابر است با ۱؛ پس مساحت مربع برابر است با $۸ \times ۱ = ۸$.

۱۸. (۲) اگر این دو عدد را با هم جمع کنیم، سه برابر حاصل جمع طول و عرض مستطیل به دست می‌آید؛ پس حاصل جمع طول و عرض مستطیل برابر است با $۲۸ \text{ cm} = (۴۴ + ۴۰) \div ۳$ ، و در نتیجه محیط مستطیل برابر است با $۲۸ \times ۲ = ۵۶ \text{ cm}$.

۱۹. (۱) توجه کنید که دو ضلع از یک مثلث نباید هم‌رنگ باشند. در شکل زیر بعضی از ضلع‌ها را با حروف مشخص کرده‌ایم.

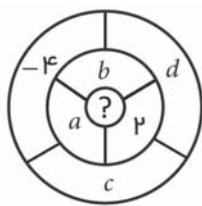


پاره‌خط‌های a و e نه سبزند و نه آبی؛ پس حتماً باید قرمز باشند. b و d هم نه آبی هستند و نه قرمز؛ پس باید سبز باشند. c نه آبی است و نه سبز؛ پس باید قرمز باشد و در نتیجه، x حتماً سبز است.

۲۰. (۲) چون عددهای هیچ دو دانش‌آموزی یکی نیست، حداکثر یک دانش‌آموز ممکن است راست بگوید. اگر اولی راست گفته باشد، هیچ‌کس درس نخوانده و در نتیجه همه (از جمله خود اولی) دروغ می‌گویند. اگر سومی، چهارمی یا پنجمی راست گفته باشند، دست‌کم دو نفر درس خوانده‌اند که این هم ممکن نیست؛ پس فقط دومی درس خوانده و بقیه درس نخوانده‌اند.

پاسخ مسئله‌های پنج امتیازی

۲۱. (۳) شکل زیر را در نظر بگیرید.



از این‌که

$$\begin{cases} d = -4 + c + 2 + b \\ c = -4 + d + 2 + a \end{cases}$$

نتیجه می‌شود $a + b = 4$ ، پس عدد مرکز باید $4 + 2 = 6$ باشد.

۲۲. (۳) اگر دست‌کم چهار کارت با عددهای متمایز داشته باشیم، دست‌کم چهار حاصل‌جمع متمایز هم به دست می‌آوریم؛ پس حداکثر سه عدد

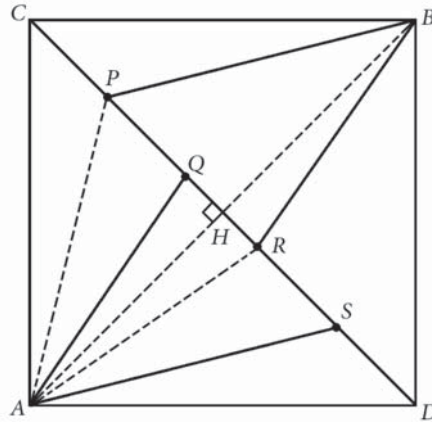
متمایز روی کارت‌ها نوشته شده‌اند. اگر کم‌تر از سه عدد متمایز داشته باشیم هم نمی‌توانیم سه حاصل‌جمع متمایز به دست بیاوریم؛ پس دقیقاً

سه عدد a و b و c روی کارت‌ها نوشته شده‌اند که $a > b > c$. به این ترتیب،

$$\begin{cases} a + b = 83 \\ a + c = 70 \\ b + c = 57 \end{cases}$$

و در نتیجه، چون $2a = (83 + 70) - 57$ باید $a = 48$.

۲۳. (۴) شکل زیر را در نظر بگیرید. توجه کنید که AH برای هر کدام از مثلث‌هایی که یک رأس‌شان A است و دو رأس دیگرشان روی CD است ارتفاع است؛ پس برای پیدا کردن بلندترین پاره‌خط باید مثالی را پیدا کنیم که بیش‌ترین مساحت را دارد.

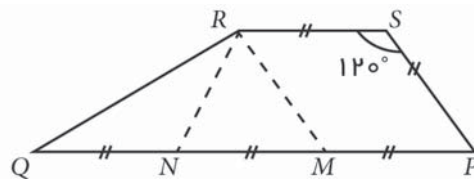


چون مساحت مربع 3 cm^2 است، مساحت هر کدام از مثلث‌های ACD و BDC برابر است با $15\text{ cm}^2 = 3 \div 2$ ؛ پس مساحت مثلث‌های BRP و AQS به ترتیب برابر است با $4\text{ cm}^2 = 15 - (2 + 9)$ و $6\text{ cm}^2 = 15 - (5 + 4)$. مثلث‌های BCP و ACP مساوی هستند؛ پس مساحت مثلث ACP برابر است با 2 cm^2 و در نتیجه مساحت مثلث APQ برابر است با $3\text{ cm}^2 = 5 - 2$. همین شکل می‌توانیم ثابت کنیم که مساحت AQR و ARS هم به ترتیب برابر 1 cm^2 و 5 cm^2 است؛ پس بلندترین پاره‌خط است.

۲۴. (۱) مجموع وزن بقیه‌ی کانگوروهای گروه، ۱۵٪ از کل وزن است که از وزن دو کانگورو از بقیه سبک‌ترند کم‌تر است؛ پس فقط یک کانگوری دیگر در گروه داریم و در نتیجه، تعداد کانگورها برابر است با $2 + 1 + 3 = 6$.

۲۵. (۴)

۲۶. (۴) شکل زیر را در نظر بگیرید.



چون $PM = RS$ و $PM \parallel RS$ متوازی‌الاضلاع و در نتیجه لوزی است؛ پس $RM = MP$ و زاویه‌ی RMP برابر 120° است. زاویه‌ی RMN برابر 60° است و مثلث MNR متساوی‌الساقین است؛ پس $MN = NR$ و زاویه‌ی RNQ برابر 120° است. به

$$\text{این ترتیب، زاویه‌ی } PQR \text{ که همان زاویه‌ی } NQR \text{ است برابر است با } \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

۲۷. (۵) شکل زیر را در نظر بگیرید.



حاصل جمع طول‌های a و b و c و d برابر است با ۲۲. طول دو تا از این پاره‌خطها برابر است با ۲ و ۵ (که کنار هم نیستند، وگرنه می‌بایست ۷ هم در عددها می‌بود). چون جمع طول‌های این دو پاره‌خط (که از بقیه کوتاه‌ترند) از ۶ بیش‌تر است، طول یکی از این پاره‌خطها ۶ است؛ پس طول چهارمی برابر است با $9 = (2 + 5 + 6) - 22$. ۲ و ۵ کنار هم نیستند، و اگر هم ۶ کنار ۵ باشد و هم ۹ کنار ۵ باشد، باید هم ۱۱ در عددها باشد و هم ۱۴. پس ممکن نیست که دو طرف ۵ پر باشد. فرض کنید $a = 5$. اگر دو طرف ۲ پر باشد، باز هم نمی‌توانیم این نسبت عددها را داشته باشیم؛ پس $d = 2$. به این ترتیب $c = 6$ و $d = 9$ که یعنی $k = 14$.

(۳). ۲۸

۲۹. (۳) به‌ازای همه‌ی عددهای بین ۶۷۲ تا ۱۰۰۰ (تا ۱۰۰۷)، خارج‌قسمت برابر است با ۲، و اگر عدد از ۶۷۲ بیش‌تر شود، باقیمانده از ۶۷۱ کم‌تر می‌شود. به‌ازای عددهای کوچک‌تر از ۶۷۲، باقیمانده از ۶۷۱ کوچک‌تر است.

(۴). ۳۰