

راه حل مسئله‌های ریاضیات کانگورو ۱۳۹۷

پایه‌های یازدهم و پیش دانشگاهی

آمنه ابراهیم‌زاده طاری

پاسخ مسئله‌های سه امتیازی

۱. (۱) سوم ماه چهارشنبه است، پس ۲۱ روز بعد، یعنی بیست و چهارم این ماه هم چهارشنبه است. پس بیست و هفتم ماه سه روز بعد از چهارشنبه، یعنی شنبه است.

۲. (۴)

$$2 - 0 \times 1 + 8 = 10, \quad 2 + 0 \times 1 \times 8 = 2, \quad 2 \times 0 + 1 \times 8 = 8$$

$$2 \times (0 + 1 + 8) = 18, \quad 2 \times 0 + 1 + 8 = 9$$

۳. (۲) مسیر او به این شکل است:

$$سرسرا \leftarrow 5 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 2$$

۴. (۴) هر بار که به سنگ ضربه می‌زند، چهار تا به تعداد سنگ‌ها اضافه می‌شود. پس هر بار باقیمانده تعداد سنگ‌ها بر ۴ ثابت می‌ماند. چون باقیمانده ۷ بر ۴ برابر ۳ است، پس همیشه باقیمانده تعداد سنگ‌ها بر ۴ برابر ۳ است. از بین گزینه‌ها، ۲۳ تنها عددی است که بر ۴ باقیمانده ۳ دارد.

۵. (۳) مکعب‌هایی ۴ وجهشان رنگ می‌شود که از دو وجه به مکعب‌های دیگر چسبیده باشند. تمام مکعب‌ها به جز مکعب اول و آخر، از دو وجه به مکعب‌های دیگر چسبیده‌اند.

۶. (۵) چون فضایی‌های سبز فقط در مریخ زندگی می‌کنند، پس هیچ فضایی سبزی در جایی غیر از مریخ زندگی نمی‌کند.

۷. (۱) زاویه بزرگ‌تر لوزی، یک زاویه از هشت ضلعی منتظم را ساخته است. هر زاویه داخلی یک هشت ضلعی منتظم 135° است. پس زاویه بزرگ‌تر لوزی هم 135° است.

۸. (۲) 57 گوی سیاه داریم و 8 گوی سفید. اگر 11 بار حرکت را انجام دهیم ممکن است هر بار 5 گوی سیاه خارج شود، پس نمی‌توانیم مطمئن باشیم با 11 حرکت، گوی سفیدی خارج می‌شود. ولی اگر 12 بار حرکت را انجام دهیم و هر بار دقیقاً 5 مهره خارج کنیم حتماً دست‌کم یکی از مهره‌ها سفید خواهد بود، چون با این کار 60 مهره خارج می‌شوند و امکان ندارد هر 60 مهره سیاه باشد.

۹. (۲) اگر طول، عرض و ارتفاع مکعب مستطیل را با a ، b و c نشان دهیم، داریم

$$ab = C, \quad ac = B, \quad bc = A$$

پس $ab \times ac \times bc = ABC$ ، یعنی $(abc)^2 = ABC$. از طرفی حجم مکعب مستطیل برابر است با abc . پس حجم مکعب مستطیل برابر است با \sqrt{ABC} .

۱۰. (۱) چون 1001 عددی فرد است، از مجموع یک عدد فرد و یک عدد زوج ساخته می‌شود. چون 2 تنها عدد اول زوج است، پس اگر بتوانیم 1001 را به صورت دو عدد اول بنویسیم، حتماً یکی از این عددها 2 و دیگری 999 است، ولی 999 اول نیست.

پاسخ مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (۲) اگر حجم بخش مشترک را x بنامیم، داریم

$$\frac{V - X}{V} = \frac{9}{10}, \quad \frac{W - X}{W} = \frac{85}{100}$$

در نتیجه

$$1 - \frac{X}{V} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{X}{V} = \frac{1}{10}, \quad 1 - \frac{X}{W} = \frac{85}{100} \Rightarrow \frac{X}{W} = \frac{15}{100}$$

پس

$$X = \frac{V}{10}, \quad X = \frac{15W}{100}$$

بنابراین

$$\frac{V}{10} = \frac{15}{100}W \\ \Rightarrow \frac{V}{W} = \frac{3}{2} \Rightarrow V = \frac{3}{2}W$$

۱۲. (۴) با توجه به نمودار، ابتدا ارتفاع آب سریع افزایش پیدا می‌کند و سپس با گذشت زمان، آهسته‌تر زیاد می‌شود. پس سطح مقطع ظرف در پایین باید کم باشد و به مرور زیاد شود.

۱۳. (۱)

$$\sqrt{17} < 5 \Rightarrow \sqrt{17} - 5 < 0 \\ \Rightarrow |\sqrt{17} - 5| + |\sqrt{17} + 5| = 5 - \sqrt{17} + \sqrt{17} + 5 = 10$$

۱۴. (۴) هشت وجهی از دو هرم با قاعده مربع تشکیل شده است. قطر وجه مربع از این هرم‌ها برابر ۱ است. پس مساحت قاعده هرم برابر است با $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

از طرفی ارتفاع هر یک از هرم‌ها برابر $\frac{1}{3}$ است. پس حجم هر هرم برابر است با $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$. در نتیجه حجم هشت وجهی برابر است با $\frac{1}{6} = \frac{2}{18}$.

۱۵. (۴) می‌دانیم

$$\begin{aligned} \frac{p+t}{2} &= 3, & \frac{q+u}{2} &= 2 \\ \frac{p+r}{2} &= -2, & \frac{q+s}{2} &= 1 \\ \frac{r+t}{2} &= 2, & \frac{s+u}{2} &= -1 \end{aligned}$$

با جمع کردن رابطه‌های بالا با هم، داریم

$$\frac{p+t}{2} + \frac{q+u}{2} + \frac{p+r}{2} + \frac{q+s}{2} + \frac{r+t}{2} + \frac{s+u}{2} = 3 + 2 + (-2) + 1 + 2 + (-1)$$

یعنی

$$p + q + r + s + t + u = 5$$

۱۶. (۴) اگر پیش‌بینی ۱ نادرست باشد، یعنی بازی مساوی شده و پیش‌بینی‌های ۳ و ۵ هر دو نادرست‌اند. پس ۳ پیش‌بینی درست نداریم. بنابراین پیش‌بینی ۱ درست است و بازی مساوی نشده است. حالا اگر پیش‌بینی ۳ درست باشد، پیش‌بینی‌های ۲ و ۴ هم باید درست باشند و بیش از ۳ پیش‌بینی درست خواهیم داشت. پس پیش‌بینی ۳ هم نادرست است. یعنی بازی‌ها مساوی نشده و رئال هم نبرده است. بنابراین پیش‌بینی ۴ نادرست است. در نتیجه پیش‌بینی‌های ۲ و ۵ باید درست باشند؛ یعنی رئال بازی را باخته، ۳ گل زده شده و رئال هم گل زده است. تنها حالت ممکن این است که رئال ۱ گل و منچستر ۲ گل زده باشد.

۱۷. (۲) زمان‌هایی پنج‌ضلعی روی سوراخ قرار می‌گیرد که مجموع زاویه‌های دوران، مضرب 108° باشد. (108° اندازه هر یک از زاویه‌های داخلی پنج‌ضلعی منتظم است.) از طرفی مجموع زاویه‌های دوران، مضرب ۲۱ نیز هست. پس اولین بار که پنج‌ضلعی داخل سوراخ قرار می‌گیرد، اولین مضرب مشترک ۲۱ و 108° یا همان ک.م.م این دو عدد است. از طرفی، $[108, 21] = 108 \times 7$. پس رأسی که ابتدا در بالای صفحه بوده در جهت عقربه‌های ساعت ۷ بار چرخیده، بعد از ۵ بار روی خودش افتاده و بعد از ۲ بار دیگر، به رأسی که در پایین صفحه و سمت چپ بوده، منتقل شده است.

۱۸. (۳) تجزیه $18^{2017} + 18^{2018}$ به صورت زیر است.

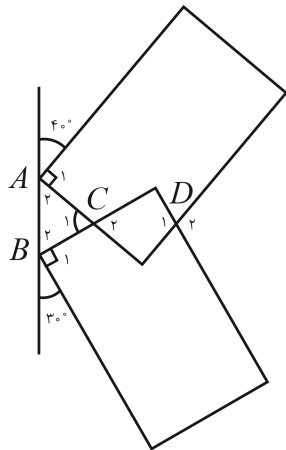
$$\begin{aligned} 18^{2017} + 18^{2018} &= 18^{2017}(1 + 18) = 18^{2017} \times 19 \\ &= (2 \times 3^2)^{2017} \times 19 = 2^{2017} \times 3^{4034} \times 19 \end{aligned}$$

در تجزیه این عدد، عامل ۷ ظاهر نشده، پس نمی‌تواند بر ۲۸ بخش‌پذیر باشد.

۱۹. (۲) عددهای ۴ و ۶ باید در یک دسته باشند، چون در غیر این صورت حاصل ضرب عددهای دو دسته زوج می‌شود و امکان ندارد مجموعشان عددی اول باشد.

همچنین عددهای ۳ و ۶ باید در یک دسته باشند. چون در غیر این صورت حاصل ضرب عددهای هر دو دسته بر ۳ بخش‌پذیر و مجموعشان هم بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود و نمی‌تواند عددی اول باشد. پس تنها حالت ممکن این است که نرگس عددهای ۳، ۴، ۶ را انتخاب کرده باشد و عددهای ۵ و ۷ را به نوشین داده باشد، یعنی $۱۰۷ = ۵ \times ۷ + ۳ \times ۴ \times ۶$ و عددی اول است.

۲۰. (۵) با توجه به شکل داریم



$$\hat{A}_2 = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ$$

$$\hat{B}_2 = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ$$

$$\hat{C}_2 = \hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{A}_1 - \hat{B}_2 = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$$

$$\theta = \hat{D}_2 = \hat{D}_1 = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 70^\circ) = 110^\circ$$

پاسخ مسئله‌های پنج امتیازی

۲۱. (۱) اگر مجموع عددهای هر سه مربع را با هم جمع کنیم، هر یک از عددهای ۱ تا ۶ دوبار در این مجموع ظاهر می‌شوند. پس

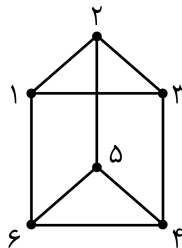
$$\text{مجموع عددهای روی هر سه مربع} = 2 \times (1 + 2 + \dots + 6) = 42$$

از طرفی مجموع عددهای هر سه مربع با هم برابر است، پس

$$\text{مجموع عددهای هر مربع} = \frac{42}{3} = 14$$

در مربعی که عددهای روی رأس‌هایش، ۱، ۵ و x هستند، دو رأس مجهول ۲ و ۶ هستند، چون مجموعشان باید برابر ۸ بشود و عدد ۵ قبلاً استفاده شده است. اگر $x = 6$ ، در مربع سمت راستی باید دو رأس کناری (سمت راست) مجموعشان برابر ۳ بشود که امکان ندارد (چون قبلاً از ۱ استفاده شده است)، پس $x = 2$.

در شکل زیر، یک حالت برای شماره‌گذاری رأس‌ها نشان داده شده است:



۲۲. (۴) n ریشه معادله است، پس $n^2 - n - 2018 = 0$ ؛ یعنی $n^2 = n + 2018$. بنابراین

$$n^2 + m = n + 2018 + m = s + 2018 = 1 + 2018 = 2019$$

۲۳. (۲) اگر A دروغ گفته باشد، یعنی A یا کوتاه‌ترین است یا بلندترین. در این صورت حتماً یکی از C و D هم دروغ گفته‌اند که ممکن نیست. پس A راست گفته است.

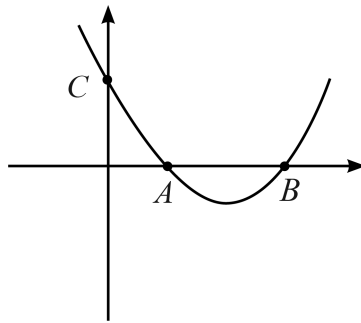
اگر B دروغ گفته باشد، یعنی B کوتاه‌ترین است، پس D هم دروغ می‌گوید که ممکن نیست؛ بنابراین B هم راست گفته است. اگر D دروغ گفته باشد و بقیه راست گفته باشند، هیچ‌یک از A, B, C و D کوتاه‌ترین فرد نیستند که ممکن نیست. پس D هم راست گفته است.

تنها حالتی که باقی می‌ماند، این است که C دروغ گفته باشد. در این حالت، D کوتاه‌ترین فرد است. هیچ‌یک از A و C هم بلندترین فرد نیستند. پس B بلندترین فرد است.

۲۴. (۴)

$$\begin{aligned} x = 0, y = 1 &\Rightarrow f(1) = f(0) \times f(1) \xrightarrow{f(1) \neq 0} f(0) = 1 \\ x = 1, y = 1 &\Rightarrow f(2) = f(1) \times f(1) = \frac{1}{4} \\ x = 2, y = 1 &\Rightarrow f(3) = f(2) \times f(1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\ \Rightarrow f(0) + f(1) + f(2) + f(3) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \end{aligned}$$

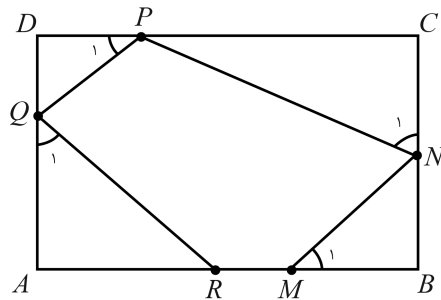
۲۵. (۳) نمودار f مانند شکل زیر است:



اگر دایره محیطی مثلث ABC را رسم کنیم، نمودار را در نقطه D قطع می‌کند. مرکز دایره محیطی، روی عمودمنصف AB است. از طرفی عمودمنصف AB ، محور تقارن سهمی است. پس اگر C را نسبت به عمودمنصف AB قرینه کنیم، روی نمودار سهمی می‌افتد. از طرفی عمودمنصف AB یکی از قطرهای دایره محیطی مثلث ABC است و اگر C را نسبت به قطر دایره قرینه کنیم، روی دایره می‌افتد. اگر قرینه C را نسبت به عمودمنصف AB قرینه کنیم، هم روی دایره قرار می‌گیرد و هم روی سهمی. پس قرینه C نسبت به عمودمنصف AB ، همان D است. بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{x_D + x_C}{2} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{s}{2} = \frac{-p}{2}, \quad y_D = y_C = q \\ \Rightarrow x_D = -p, \quad y_D = q \end{aligned}$$

۲۶. (۵) اگر مسیر توپ را ادامه دهیم، شکل زیر ساخته می‌شود. با توجه به این‌که توپ با همان زاویه‌ای که به میز می‌خورد، برمی‌گردد، داریم



$$\triangle MBN \sim \triangle PCN$$

پس

$$\frac{BM}{BN} = \frac{PC}{CN} \Rightarrow \frac{۱٫۲}{۰٫۸} = \frac{PC}{۱٫۲} \Rightarrow PC = ۱٫۸ \Rightarrow DP = ۱٫۲$$

بنابراین

$$\hat{P}_1 = \hat{M}_1, \hat{D} = \hat{B}, DP = BM$$

در نتیجه

$$\triangle DPQ \simeq \triangle MNB$$

پس

$$DQ = ۰٫۸$$

در نتیجه

$$QA = ۱٫۲$$

پس داریم

$$QA = CN, \hat{A} = \hat{C}, \hat{Q}_1 = \hat{N}_1 \Rightarrow \triangle CNP \simeq \triangle QAR \Rightarrow AR = PC = ۱٫۸$$

۲۷. (۲)

$$\begin{aligned} ||4^x - 3| - 2| = 1 &\Rightarrow |4^x - 3| - 2 = \pm 1 \\ \Rightarrow |4^x - 3| = 3 \text{ یا } |4^x - 3| = 1 \\ |4^x - 3| = 3 &\Rightarrow 4^x - 3 = \pm 3 \Rightarrow 4^x = 0 \text{ یا } 4^x = 6 \end{aligned}$$

ممکن نیست 4^x برابر صفر شود. از $4^x = 6$ نتیجه می‌شود $x = \log_4 6$.

$$\begin{aligned} |4^x - 3| = 1 &\Rightarrow 4^x - 3 = \pm 1 \Rightarrow 4^x = 4 \text{ یا } 4^x = 2 \\ \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

پس معادله ۳ جواب دارد.

۲۸. (۱) اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم را برابر a در نظر بگیریم، می توانیم بنویسیم $IH = \frac{a}{\sqrt{3}}$. چون در مثلث GED ، I و H وسط ضلع های GE و GD هستند، پس IH میان خط مثلث GED و طولش نصف طول ضلع ED است. از طرفی دو مثلث FGI و GHC با هم هم نهشت اند و $HC = FI$. همین طور می دانیم $FC = 2a$ ، پس $FI = \frac{2a - \frac{a}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

در مثلث FGI ، ارتفاع وارد بر FI با ارتفاع $IHDE$ برابر است. پس نسبت مساحت مثلث FGI به مساحت ذوزنقه $IHDE$ برابر است با

$$\frac{FI}{IH + ED} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}a}{a + \frac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}$$

۲۹. (۳) اگر تعداد چپ دست های کلاس را با n نمایش دهیم، تعداد راست دست ها برابر است با $174n$ و تعداد کل دانش آموزان کلاس برابر است با $214n$. با توجه به اطلاعات مسئله داریم

$$\begin{aligned} \frac{n \times 174n}{\binom{214n}{2}} &= \frac{1}{2} \Rightarrow 214n^2 = \frac{214n(214n - 1)}{2} \\ \Rightarrow 516n^2 &= 5176n^2 - 214n \Rightarrow 214n = 0,16n^2 \stackrel{n \neq 0}{\Rightarrow} 0,16n = 214 \\ \Rightarrow n &= \frac{214}{0,16} = 15 \Rightarrow 214n = 214 \times 15 = 36 \end{aligned}$$

۳۰. (۵) اگر $15!$ را به عوامل اول تجزیه کنیم، توان 5 برابر 3 خواهد شد (عامل 5 در این عددها وجود داشته است: $5, 10, 15$). پس $15!$ به 3 صفر ختم می شود. توان 2 در تجزیه به عوامل اول، برابر 11 خواهد شد. (عامل 2 در این عددها وجود داشته است: $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$). پس $15!$ بر هر یک از عددهای $16, 32, 64$ بخش پذیر است. برای این که عددی بر $16, 32, 64$ بخش پذیر باشد، باید به ترتیب $4, 5$ و 6 رقم آخرش بر هر یک از این عددها بخش پذیر باشد. پس برای این که $15!$ بر 16 بخش پذیر باشد، رقم هزارگانش باید زوج باشد. برای این که بر 32 بخش پذیر باشد، رقم هزارگانش باید یکی از رقم های $0, 4$ و 8 باشد. برای این که بر 64 بخش پذیر باشد، باید رقم هزارگانش 0 یا 8 باشد. از طرفی نمی تواند 0 باشد، چون $15!$ به 3 صفر ختم می شود. پس رقم هزارگانش برابر 8 است. از طرفی $15!$ بر 9 بخش پذیر است. پس مجموع رقم هایش باید بر 9 بخش پذیر باشد. پس رقم نامشخص دیگر، باید 3 باشد.