مسابقه‌ی ریاضی کانگورو ۲۰۱۴

پاسخ مسئله‌های سه امتیازی

۱. (۳) شکل از ۶۱ مکعب $۱ \times ۱ \times ۱$ تشکیل شده است. پس $۱۲۵ - ۶۱ = ۶۴$ مکعب را از شکل جدا کرده‌ایم.

۲. (۳) در هر سال به مجموع سن این سه نفر ۳ تا اضافه می‌شود. اگر قرار باشد مجموع سن آن‌ها به صورت عددی دو رقمی با رقم‌های برابر باشد، لازم است این عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. پس اگر n سال بعد این اتفاق بیفتد. باید $۳n + ۴۴$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. کوچک‌ترین n با این خاصیت ۱۱ است. بعد از ۱۱ سال سن این سه نفر روی هم ۷۷ سال سن خواهد بود.

۳. (۲) توجه کنید که

$$a^{-۳b} = (a^b)^{-۳} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳} = ۸$$

۴. (۳) اگر n تعداد توپ‌های سبد کوچک باشد، تعداد توپ‌های سبد متوسط $۲n$

است. اگر y تعداد توپ‌های سبد بزرگ باشد، داریم

$$\frac{x+y}{۲} = ۲x \Longrightarrow x+y = ۴x \Longrightarrow y = ۳x$$

همچنین

$$x + ۲n + y = ۴۸ \Longrightarrow ۶x = ۴۸ \Longrightarrow x = ۸$$

پس سبد بزرگ ۲۴ توپ دارد.

۵. (۵) داریم

$$\frac{۲^{۲۰۱۴} - ۲^{۲۰۱۳}}{۲^{۲۰۱۳} - ۲^{۲۰۱۲}} = \frac{۲^{۲۰۱۳}(۲-۱)}{۲^{۲۰۱۲}(۲-۱)} = ۲$$

۶. (۵) توجه کنید که

$$\begin{aligned} ۲b + ۲ &= ۲(b+۱), \\ b^۲ - ۱ &= (b+۱)(b-۱) \\ b^۲ + b &= b(b+۱) \\ -b - ۱ &= -(b+۱) \end{aligned}$$

۷. (۵) توجه کنید

$$(۲^{۲۲})^۵ \times (۵^{۵۵})^۲ = ۲^{۱۱۰} \times ۵^{۱۱۰} = ۱۰^{۱۱۰}$$

۸. (۴) طبق اصل لانه کبوتری، یکی از دوستان آرش دست‌کم ۲ نامه برای او فرستاده است.

۹. (۴) محیط قاعده‌ی استوانه‌ی بزرگ دو برابر محیط قاعده‌ی هر یک از استوانه‌های کوچک‌تر است، پس شعاع آن هم دو برابر شعاع قاعده‌ی استوانه‌های کوچک و در نتیجه مساحت آن ۴ برابر مساحت قاعده‌ی استوانه‌های کوچک است. بنابراین حجم استوانه ۴ برابر حجم استوانه‌های کوچک است.

۱۰. (۵) سال ۱۵۲۹ آخرین باری است که عدد یک سال این ویژگی را داشته است.

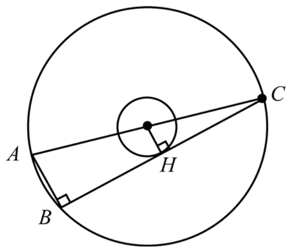
پاسخ مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (۱) اگر d واحد به یکی از یال‌ها اضافه شود، به حجم مکعب مستطیل به اندازه‌ی حاصل‌ضرب d در دو یال دیگر اضافه می‌شود. پس بیش‌ترین افزایش حجم زمانی اتفاق می‌افتد که یال کوچک‌تر را d واحد افزایش دهیم.

۱۲. (۲) روی هم ۶ بازی انجام شده است. A در ۲ بازی برنده شده است و یک بازی را مساوی کرده است. هر یک از B و C یک برد، یک باخت و یک تساوی داشته‌اند. پس D هیچ بردی نداشته است و تنها در یک بازی تساوی داشته است.

۱۳. (۲) AC قطر دایره‌ی بزرگ است. پس $\angle ABC = ۹۰^\circ$. اگر مرکز دایره‌ها و نقطه‌ی تماس BC با دایره‌ی کوچک را به ترتیب O و H بنامیم، $\angle H = ۹۰^\circ$. پس $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{OHC}$، بنابراین

$$\frac{OH}{OC} = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۱۲}{AC} \Longrightarrow AC = ۳۶$$
$$\Longrightarrow OC = ۱۸$$



۱۴. (۳) تنها جواب‌های نامعادله در مجموعه‌ی عددهای طبیعی سه‌تایی‌های مرتب

$(۲,۳,۵)$ و $(۲,۳,۴)$ است.

۱۵. (۴) دو عبارت علامت یکسان دارند، پس حاصل تقسیم آن‌ها عددی مثبت است؛ یعنی

$$\frac{(-۲)^{۲n+۳}a^{۲n+۲}b^{۲n-۱}c^{۳n+۲}}{(-۳)^{۲n+۲}a^{۴n+۱}b^{۲n+۵}c^{۳n-۴}} = \frac{-۲^{n+۳}c^{۶}}{۳^{۲n+۲}a^{۲n-۱}b^{۶}} > ۰$$

از طرفی $c^{۶}$، $b^{۶}$، $۲^{n+۳}$ و $۳^{۲n+۲}$ همگی عددهایی مثبت‌اند و علامت $a^{۲n-۱}$ هم با علامت a یکی است. پس $-a > ۰$، بنابراین $a < ۰$.

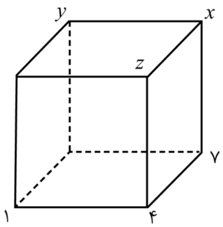
۱۶. (۴)

$$۶ \times ۷ \times ۲۴ \times ۳۶۰۰ = ۷ \times ۶ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۲^{۴} \times ۵^{۲} \times ۳^{۲}$$
$$= ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۰!$$

۱۷. (۱) مجموع عددهای روی تمام رأس‌ها برابر است با $۱ + ۲ + \cdots + ۸ = \frac{۸\times۹}{۲} = ۳۶$. از طرفی مجموع رأس‌های روی وجه پایینی $=$ مجموع رأس‌های روی جه بالایی $= ۱۸$. پس عدد رأس چهارم از وجه پایینی برابر ۶ است. اگر عددهای روی رأس بالایی را مانند شکل نام‌گذاری کنیم، داریم

$$۷ + ۴ + x + z - ۷ + ۶ + x + y = ۱۸$$

پس $x + y = ۵$ و $x + z = ۷$. می‌دانیم x، y و z هرکدام یکی از عددهای ۲، ۳، ۵ و ۸اند. بنابراین یا $x = ۳$ و $y = ۲$ یا $x = ۲$ و $y = ۳$. همچنین یا $z = ۵$ و $x = ۲$ یا $z = ۲$ و $x = ۵$. پس تنها حالتی که هر دو شرط $x + y = ۵$ و $x + z = ۷$ برقرار باشند، حالتی است که $x = ۲$.

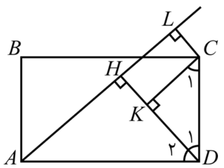


۱۸. (۲) اگر وزن کل پنیر و وزن آب داخل آن را به ترتیب با a و b نمایش دهیم، می‌دانیم وزن چربی داخل پنیر برابر است با $\frac{۲۴}{۱۰۰}a$. پس داریم

$$\frac{\frac{۲۴}{۱۰۰}a}{a-b}=\frac{۶۴}{۱۰۰}\Longrightarrow\frac{۲۴a}{۱۰۰(a-b)}=\frac{۶۴}{۱۰۰}\Longrightarrow\frac{۳a}{a-b}=۸$$
$$\Longrightarrow ۳a=۸a-۸b\Longrightarrow ۸b=۵a\Longrightarrow\frac{b}{a}=\frac{۵}{۸}=\frac{۶۲/۵}{۱۰۰}$$

۱۹. (۱) از C بر پاره‌خط HD عمود می‌کنیم. در شکل زیر، $KCMH$ مستطیل است. پس $HK=۲\,\mathrm{cm}$ بنابراین $KD=۴\,\mathrm{cm}$. داریم

$$\hat{C}_۱+\hat{D}_۱=۹۰^\circ,\ \hat{D}_۱+\hat{D}_۲=۹۰^\circ\Longrightarrow\hat{C}_۱=\hat{D}_۲$$
$$\Longrightarrow A\overset{\triangle}{H}D\sim D\overset{\triangle}{C}K\Longrightarrow\frac{AD}{CD}=\frac{HA}{KD}=۲$$
$$\Longrightarrow ۲=\frac{HA}{۴}\Longrightarrow HA=۸\,cm$$



بنابراین

$$AD=\sqrt{AH^۲+HD^۲}=\sqrt{۶۴+۳۶}=۱۰\ \mathrm{cm}$$

۲۰. (۳) داریم

$$\begin{aligned} f\big(f(f(\circ))\big) &= f\big(f(b)\big) = f(ab+b) \\ &= a(ab+b)+b = ۲ \Longrightarrow ab(a+۱)+b = ۲ \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} f\big(f(f(۱))\big) f\big(f(a+b)\big) &= f\big(a(a+b)+b\big) \\ &= f(a^۲+ab+b) = a(a^۲+ab+b)+b \\ &= a^۳+ab(a+۱)+b = ۲۹ \\ &\Longrightarrow a^۳+۲ = ۲۹ \Longrightarrow a^۳ = ۲۷ \Longrightarrow a = ۳ \end{aligned}$$

پاسخ مسئله‌های پنج امتیازی

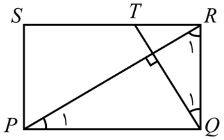
۲۱. (۵) دست‌کم دوتا ازاین عددها هم بر ۵ و هم بر ۷ بخش‌پذیرند. ۳۵ و ۷۰ کوچک‌ترین دو عددی‌اند که بر ۵ و ۷ هم‌زمان بخش‌پذیرند. پس بزرگ‌ترین عدد از بین این ۱۰ عدد کوچک‌تر از ۷۰ نیست. از طرفی امکان دارد بزرگ‌ترین عدد برابر ۷۰ باشد. مثال زیر را در نظر بگیرید.

$$۷, ۱۴, ۳۵, ۷۰, ۲۸, ۲۱, ۴۲, ۵, ۱۵, ۲۵$$

۲۲. (۴) در شکل زیر داریم

$$\begin{aligned} &\hat{Q}_۱ + \hat{R}_۱ = \hat{P}_۱ + \hat{R}_۱ = ۹۰^\circ \\ &\Longrightarrow \angle P_۱ = \angle Q_۱ \\ &\Longrightarrow P\overset{\triangle}{Q}R \sim Q\overset{\triangle}{R}T \Longrightarrow \frac{PQ}{QR} = \frac{QR}{RT} = \frac{QR}{\frac{۱}{۲}PQ} \\ &\Longrightarrow QR^۲ = \frac{۱}{۲}PQ^۲ \Longrightarrow ۲QR^۲ = PQ^۲ \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{۲}QR = PQ \Longrightarrow \frac{PQ}{QR} = \sqrt{۲}$$



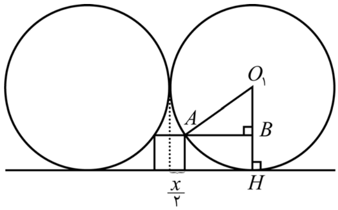
۲۳. (۱) اگر تعداد کانگوروهای نقره‌ای را برابر x در نظر بگیریم، داریم

$$\frac{۲}{۳} = \frac{\binom{x}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{\binom{x}{۳}}{۸۴} \Longrightarrow \binom{x}{۳} = ۵۶$$
$$\Longrightarrow \frac{x(x-۱)(x-۲)}{۶} = ۵۶$$
$$\Longrightarrow x(x-۱)(x-۲) = ۶ \times ۷ \times ۸ \Longrightarrow x = ۸$$

پس فقط یک کانگورو طلایی است.

۲۴. (۱) مانند شکل زیر از مرکز یکی از دایره‌ها ($O_۱$) بر خط مماس عمود می‌کنیم. پای عمود همان نقطه‌ی تماس است. تقاطع دایره با مربع را A و پای عمود از A بر $O_۱H$ را B می‌نامیم. اگر طول ضلع مربع را برابر x در نظر بگیریم داریم $AB = ۱ - \frac{x}{۲},\ O_۱B = ۱ - x,\ O_۱A = ۱$. بنا بر قضیه‌ی فیثاغورس داریم

$$۱^۲ = (۱-x)^۲ + \left(۱ - \frac{x}{۲}\right)^۲ \Longrightarrow ۱ = ۲ + \frac{۵}{۴}x^۲ - ۳x$$
$$\Longrightarrow \frac{۵}{۴}x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$$
$$\Longrightarrow x = ۲ \text{ یا } x = \frac{۲}{۵}$$



طول ضلع مربع از شعاع دایره کوچک‌تر است. پس امکان ندارد که x برابر ۲ باشد. پس $x = \frac{۲}{۵}$.

۲۵. (۴) می‌توانیم تمام عددهای کوچک‌تر از ۱۰۰ را بنویسیم که ر ۳ بخش‌پذیر نیستند. $۱۰۰ - \left[\frac{۱۰۰}{۳}\right] = ۶۷$ عدد با این شرایط وجود دارد. اگر ۳ و ۶ را هم به این عددها اضافه کنیم، همچنان حاصل‌ضرب عددها، تنها دو عامل ۳ دارد، پس بر ۵۴ بخش‌پذیر نیست.

ولی اگر هر مضرب دیگری از ۳ را اضاله کنیم، حاصل‌ضرب بر ۵۴ بخش‌پذیر خواهد شد.

۲۶. (۱) در شکل زیر، بخشی از دو چند ضلعی را رسم کرده‌ایم. مثلث BCX متساوی‌الاضلاع است. پس $\angle XBC = ۶۰^\circ$ از طرفی $\angle ABC = \frac{۱۸۰ \times ۱۳}{۱۵} = ۱۵۶^\circ$، پس

$$\angle ABX = ۳۶۰ - (۶۰ + ۱۵۶) = ۱۴۴ = \frac{۱۸۰(n-۲)}{n}$$

$$= ۱۴۴ \Longrightarrow ۵n - ۱۰ = ۴n \Longrightarrow n = ۱۰$$

رسامی‌نشده

۲۷. (۳) برای این که $k = ۱۰۲۴^{\frac{۱}{n}} + ۱$ عددی طبیعی باشد، لازم است n برابر یکی از عددها ۱، ۲، ۵ یا ۱۰ باشد. داریم

$$n = ۱ \Longrightarrow ۲۰۱۴ + m = ۱۰۲۵ \Longrightarrow m = ۱۰۲۵ - ۲۰۱۴ \notin \mathbb{N}$$

$$n = ۲ \Longrightarrow (۲۰۲۴ + m)^{\frac{۱}{۲}} = ۳۳ \Longrightarrow ۲۰۱۴ + m = ۱۰۸۹$$

$$\Longrightarrow m = ۱۰۸۹ - ۲۰۱۴ \notin \mathbb{N}$$

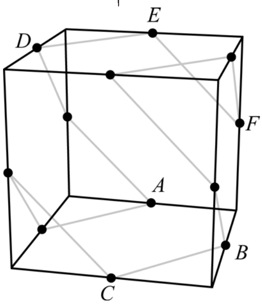
$$n = ۵ \Longrightarrow (۲۰۱۴ + m)^{\frac{۱}{۵}} = ۵ \Longrightarrow ۲۰۱۴ + m = ۵^۵$$

$$\Longrightarrow m = ۵^۵ - ۲۰۱۴$$

$$n = ۱۰ \Longrightarrow (۲۰۱۴ + m)^{\frac{۱}{۱۰}} = ۳ \Longrightarrow ۲۰۱۴ + m = ۳^{۱۰}$$

$$\Longrightarrow m = ۳^{۱۰} - ۲۰۱۴$$

۲۸. (۲) در شکل دو نوع زاویه داریم. دسته‌ای از زاویه‌ها هم اندازه‌ی $\angle ABC$ هستند، داریم $AB = BC = CA$، پس $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است. پس $\angle B = ۶۰^\circ$. دسته‌ی دیگر هم‌اندازه‌ی $\triangle DEF$ هستند.



اگر طول ضلع مکعب را برابر $۲n$ در نظر بگیریم، در مثلث DEF داریم

$$DE = Ef = x\sqrt{۲}$$

از طرفی DF قطر مکعب مستطیلی به ابعاد $x \times x \times ۲x$ است. پس

$$DF = \sqrt{۴x^۲ + x^۲ + x^۲} = x\sqrt{۶}$$

طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم

$$\begin{aligned} &DF^۲ = DE^۲ + EF^۲ - ۲DE \cdot EF \cos \hat{E} \\ &\Longrightarrow ۶x^۲ = ۲x^۲ + ۲x^۲ - ۴x^۲ \cos \hat{E} \\ &\Longrightarrow \cos \hat{E} = -\frac{۱}{۲} \Longrightarrow E = ۱۲۰^\circ \end{aligned}$$

از بین ۱۲ زاویه‌ی ۱۲ ضلعی داخل مکعب ۶ تا از زاویه‌ها برابر ۶۰° و ۶ تای دیگر برابر ۱۲۰° است. پس مجموع زاویه‌ها برابر است با

$$۶ \times ۶۰ + ۶ \times ۱۲۰ = ۶ \times ۱۸۰ = ۱۰۸۰^\circ$$

۲۹. (۴)

$$\begin{aligned} &f(x+۱) = \frac{xf(x)}{x-۳} \\ &\Longrightarrow f(۵) = ۴!,\ f(۶) = \frac{۵!}{۲},\ f(۷) = ۵!,\ f(۸) = \frac{۷!}{۴!} \end{aligned}$$

با استفاده از استقرای ریاضی می‌توان نشان داد که برای$x \geq ۸$ داریم $f(x) = \frac{(x-۱)!}{(x-۴)!}$. پایه‌ی استقرا برای $x = ۸$ درست است. فرض کنیم حکم برای x درست باشد. داریم

$$\begin{aligned} f(x+۱) = \frac{xf(x)}{x-۳} = \frac{x\frac{(x-۱)!}{(x-۴)!}}{x-۳} &= \frac{x!}{(x-۳)(x-۴)!} \\ &= \frac{x!}{(x-۳)!} \end{aligned}$$

پس حکم استقرا برای $x+۱$ هم ثابت شد. پس داریم

$$f(۴)f(۷)f(۱۰)f(۱۳)\cdots f(۲۰۱۱)f(۲۰۱۴)$$
$$= ۶ \times ۵! \times \frac{۹!}{۶!} \times \frac{۱۲!}{۹!} \times \cdots \times \frac{۲۰۱۳!}{۲۰۱۰!} = ۲۰۱۳!$$

۳۰. (۴) بیش‌ترین تعداد حیوانات زمانی اتفاق می‌افتد که تمام حیوانات از یک نوع باشند. فرض کنید m شیر، گرگ خورده باشند، n شیر، بز خورده باشند و k گرگ بز خورده باشند. داریم

$$\text{تعداد شیرها} = ۶ - m - n + k$$
$$\text{تعداد گرگ‌ها} = ۵۵ - m - k + n$$
$$\text{تعداد بزها} = ۱۷ - n - k + m$$

تعداد دو نوع از حیوانات باید صفر شود. ممکن نیست تعداد شیرها و تعداد گرگ‌ها یا تعداد شیرها و تعداد بزها هم‌زمان صفر شود. تنها حالتی ممکن است که تعداد گرگ‌ها $=$ تعداد بزها $= ۰$. پس

$$\begin{cases} ۱۷ - n - k + m = ۰ \\ ۵۵ - m - k + n = ۰ \end{cases} \Longrightarrow ۷۲ - ۲k = ۰ \Longrightarrow k = ۳۶$$
$$\Longrightarrow ۵۵ - m + n - ۳۶ = ۰ \Longrightarrow -n + m = ۱۹$$
$$\text{تعداد شیرها} = ۶ - m - n + ۳۶ = ۴۲ - (m+n)$$
$$= ۴۲ - (m-n) - ۲n = ۴۲ - ۱۹ - ۲n = ۲۳ - ۲n$$

این مقدار در حالتی بیش‌ترین اندازه است که $n = ۰$.