مسابقه‌ی ریاضی کانگورو ۲۰۱۵

پاسخ مسئله‌های سه امتیازی

۱. (۵)

۲. (۱) توجه کنید که

$$(a-b)^{۵} = -(b-a)^{۵} \Longrightarrow (a-b)^{۵} + (b-a)^{۵} = ۰$$

۳. (۱) داریم

$$۲^{۲x} = ۴^{x+۱} \Longrightarrow ۴^{x} = ۴^{x+۱} \Longrightarrow x = x + ۱$$

ولی معادله‌ی $x = x + ۱$ هیچ جوابی ندارد.

۴. (۲)

۵. (۳) داریم

$$۲۰۰۱+۲۰۳۱ = ۲۰۰۲+۲۰۲۰ = \cdots = ۲۰۱۶+۲۰۱۷ = ۲\times ۲۰۱۵$$

پس

$$۲۰۱۵ = \frac{۳۱ \times ۲۰۱۵}{۳۱} = \frac{۱۵ \times ۲ \times ۲۰۱۵ + ۲۰۱۵}{۳۱} = \frac{۲۰۰۱ + \cdots + ۲۰۳۱}{۳۱}$$

۶. (۴) در هر شکل، محل تقاطع دو خم را رأس گراف و خم‌ها را یال‌های گراف در نظر بگیرید. یک گراف، ویژگی ذکر شده را دارد اگر درجه‌ی تمام رأس‌های آن زوج باشد. در شکل‌های A، C و D درجه‌ی تمام رأس‌ها برابر ۴ است.

۷. (۵) وقتی کاغذ را تا می‌کنیم هر قسمت آن، ۹ لایه کاغذ دارد. پس هر سوراخ بعد از باز شدن به ۹ سوراخ تبدیل می‌شود.

۸. (۵)

۹. (۳) اگر ضلع‌های مثلث را از کوچک به بزرگ a، b و c بنامیم، داریم

$$a^۲ + b^۲ = c^۲ \Longrightarrow \frac{a^۲\pi}{۸} + \frac{b^۲\pi}{۸} = \frac{c^۲\pi}{۸} \Longrightarrow X + Y = Z$$

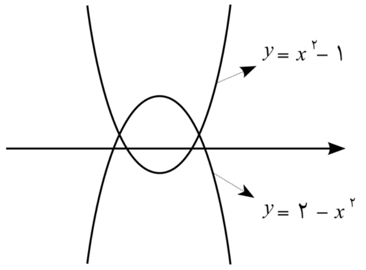
۱۰. (۵) امکان ندارکه یک چهارضلعی محدب، هیچ زاویه‌ی ؟؟؟ نداشته باشد. چون در آن صورت مجموع زاویه‌هایش از $۳۶۰ = ۹۰ \times ۴$ بیش‌تر خواهد شد.

پاسخ مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (۳)

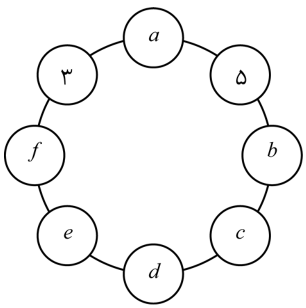
$$\sqrt{(۲۰۱۵ + ۲۰۱۵) + (۲۰۱۵ - ۲۰۱۵) + (۲۰۱۵ \div ۲۰۱۵) + (۲۰۱۵ \times ۲۰۱۵)}$$
$$= \sqrt{۲۰۱۵^۲ + ۲ \times ۲۰۱۵ + ۱} = \sqrt{(۲۰۱۵ + ۱)^۲} = ۲۰۱۶$$

۱۲. (۴) به شکل زیر دقت کنید:



۱۳. (۵) عددهای داخل دایره‌ها را مانند شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم: داریم

$$a = ۳ + ۵ = ۸$$
$$a + b = ۵ \Longrightarrow b = ۵ - ۵ = -۳$$
$$۵ + c = b \Longrightarrow c = b - ۵ = -۸$$
$$a + f = ۳ \Longrightarrow f = ۳ - a = -۵$$
$$۳ + e = f \Longrightarrow e = r - ۳ = -۸$$
$$d = -۸ + (۸) = -۱۶$$



اما از طرفی باید داشته باشیم $c = b + d$، ولی $-۸ \neq -۱۶ + (-۳)$.

پس چنین کاری ممکن نیست.

۱۴. (۳) داریم

$$c - d = a \Longrightarrow c = a + d \Longrightarrow c > a,\ c > d$$

همین‌طور

$$\frac{c}{e} = b \Longrightarrow c = eb \Longrightarrow c > e,\ c > b$$

۱۵. (۲) اگر این ۶ عدد را a، b، c، d، e و f بنامیم، داریم

$$\sqrt[3]{abc} = ۱۲,\quad \sqrt[3]{def} = ۳$$
$$\Longrightarrow abc = ۱۲^۳,\quad def = ۳^۳$$
$$\Longrightarrow \sqrt[6]{abcdef} = \sqrt[6]{۱۲^۳ \times ۳^۳} = \sqrt[6]{۳۶^۳} = ۶$$

۱۶. (۱) اگر شعاع دایره‌ی وسطی و شعاع دایره‌ی بزرگ را به ترتیب با r و R نمایش دهیم، داریم

$$\frac{\pi}{۴} = \frac{۱}{۴}\pi(r^۲ - ۱) = \frac{۱}{۴}\pi(R^۲ - r^۲)$$
$$\Longrightarrow r^۲ - ۱ - ۱ \Longrightarrow r^۲ = ۲ \Longrightarrow r = \sqrt{۲}$$
$$\Longrightarrow R^۲ - r^۲ = ۱ \Longrightarrow R^۲ - ۲ = ۱ \Longrightarrow R^۲ = ۳ \Longrightarrow R = \sqrt{۳}$$

پس حاصل‌ضرب شعاع‌ها برابر $\sqrt{۶}$ است.

۱۷. (۳) اگر قیمت اولیه‌ی خودروی اول و دوم را به ترتیب با x و y نمایش دهیم، داریم

$$۱/۴x + ۱/۶y = ۱/۵۴(x + y) \Longrightarrow ۰/۰۶y = ۰/۱۴x$$
$$\Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{۰/۰۶}{۰/۱۴} = \frac{۳}{۷}$$

۱۸. (۳) اگر A را پیشامد برنده شدن بهروز در نظر بگیریم، داریم

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{۱۲}$$

۱۹. (۳) مجموع رقم‌های عددهای سه رقمی، دو رقمی با یک رقمی، یکی از عددهای ۱ تا ۲۷ می‌شود. زیرا اگر این عد را به شکل $\overline{abc}$ نمایش دهیم، مجموع رقم‌های آن برابر است با

$$۱ + ۰ + ۰ \leq a + b + c \leq ۹ + ۹ + ۹$$

مجموع رقم‌های عددهای چهار رقمی کوچک‌تر از ۲۰۱۶ حداکثر ممکن است برابر ۲۸ (در مورد عدد ۱۹۹۹) شود پس مجموع رقم‌های روی هر یک از گوی‌ها، یکی از عددهای ۱ تا ۲۸ است. یعنی ۲۸ رنگ مختلف دارند.

۲۰. (۲) در تاس سمت راست، وجه روبه‌روی ۴ برابر ۳ و وجه روبه‌روی ۶ برابر ۱ است. پس روی وجه خواسته شده یکی از عددهای ۲ و ۵ نوشته شده است. چون دو تاس مشابه هم‌اند، پس وجهی از تاس سمت راست که به تاس سمت چپ چسبیده است، برابر ۲ است.

پاسخ مسئله‌های پنج امتیازی

۲۱. (۴) مجموع عددهای داخل جدول برابر است با

$$\begin{aligned}
&۱ + ۲ + \cdots + ۱۰ \\
&+ ۲ + ۴ + \cdots + ۲۰ \\
&+ ۳ + ۶ + \cdots + ۳۰ \\
&\vdots \\
&+ ۱۰ + ۲۰ + \cdots + ۱۰۰ \\
&= (۱ + ۲ + \cdots + ۱۰) + ۲(۱ + ۲ + \cdots + ۱۰) \\
&+ ۳(۱ + ۲ + \cdots + ۱۰) + \cdots + ۱۰(۱ + ۲ + \cdots + ۱۰) \\
&= (۱ + ۲ + \cdots + ۱۰)(۱ + ۲ + \cdots + ۱۰) = ۵۵ \times ۵۵ = ۳۰۲۵
\end{aligned}$$

۲۲. (۱) نمودار با معادله‌ی داده شده محور عمودی را در سه نقطه به عرض‌های ۰، $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ قطع می‌کند. زیرا

$$\begin{aligned}
x = ۰ &\Longrightarrow (y^{۲})^{۲} = ۲y^{۲} \Longrightarrow y^{۴} - ۲y^{۲} = ۰ \\
&\Longrightarrow y^{۲}(y - \sqrt{۲})(y + \sqrt{۲}) = ۰ \Longrightarrow y = ۰ \text{ یا } y = \sqrt{۲} \text{ یا } y = -\sqrt{۲}
\end{aligned}$$

و خط a تنها خطی است که نمودار را در سه نقطه قطع می‌کند و یکی از نقطه‌های تقاطع دقیقاً وسط دوتای دیگر است.

۲۳. (۴)

۲۴. (۳) اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی n ضلعی منتظم برابر است با $\frac{۱۸۰(n-۲)}{n}$. فقط در دو حالت زیر، حاصل این کسر عددی طبیعی می‌شود:

حالت اول:

$$n|۱۸۰ \Longrightarrow n|۲^۲ \times ۵ \times ۳^۲$$

پس تعداد مقسوم‌علیه‌های ۱۸۰ برابر است با $۱۸ = ۳ \times ۳ \times ۲$. البته $n = ۱$ و $n = ۲$ قابل قبول نیستند. پس ۱۶ چند ضلعی در این حالت وجود دارد.

حالت دوم: ولی n و $n - ۲$ عامل مشترکی داشته باشند $n \nmid ۱۸۰$ داریم $(n, n - ۲) = ۲$، پس حالت دوم فقط در حالتی اتفاق می‌افتد که n عددی زوج باشد به طوری که $n \nmid ۱۸۰$ ولی $\frac{n}{۲}|۱۸۰$. پس n را می‌توان به شکل $۲^۳ \times ۵^n \times ۳^y$ نوشت که $۰ \leq x \leq ۱$ و $۰ \leq y \leq ۲$. در کل ۶ عدد به این شکل وجود دارد.

پس روی‌هم ۲۲ عدد n با شرایط مسئله وجود دارند.

۲۵. (۵) این عددها عبارت‌اند از:

$$۱ + ۲ + \cdots + ۲۵۶ = ۵۱۱$$
$$۱ + ۲ + \cdots + ۱۲۸ + ۵۱۲ = ۱۰۲۳ - ۲۵۶$$
$$۱ + ۲ + \cdots + ۶۴ + ۲۵۶ + ۵۱۲ = ۱۰۲۳ - ۱۲۸$$
$$۱ + ۲ + \cdots + ۳۲ + ۱۲۸ + ۲۵۶ + ۵۱۲ = ۱۰۲۳ - ۶۴$$
$$۱ + ۲ + \cdots + ۱۶ + ۶۴ + ۱۲۸ + ۲۵۶ + ۵۱۲ = ۱۰۲۳ - ۳۲$$

۲۶. (۴) اگر ضلع و وتر مثلث را به ترتیب با a و b نمایش دهیم، داریم

$$a^۲ = ۴۰۰ + b^۲$$

a و b باید زوجیت یکسان داشته باشند، پس اختلاف آن‌ها عددی زوج است.

مثلاً $a-b=2n$ که x عددی طبیعی است. پس داریم

$$(b+2x)^2=400+b^2 \Longrightarrow b^2+4x^2+4bx=400+b^2$$
$$\Longrightarrow bx+x^2=100$$

طرف چپ تساوی بر x بخش‌پذیر است، پس طرف راست هم باید بر x بخش‌پذیر باشد. پس $x \in \{1,2,4,5,10,20,25,50,100\}$. از طرفی $x<10$. چون $x^2<100$، پس $x \in \{1,2,4,5\}$. معادله‌ی $bx+x^2=100$ به‌ازای هر یک از این عدها یک جواب دارد.

۲۷. (۳) اگر مساحت مستطیل را برابر S در نظر بگیریم، داریم

$$\begin{aligned}
S_{DAM_1}&=\frac{1}{4}S\\
S_{AM_1B}&=\frac{1}{2}S,\ S_{AM_2B}=\frac{1}{2}S_{AM_1B}=\frac{1}{4}S\\
S_{M_1M_2M_3}&=\frac{1}{2}S_{M_1M_2B}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}S_{AM_1B}=\frac{1}{8}S
\end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
S_{M_1M_2C}&=\frac{1}{2}S_{AM_1C}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}S=\frac{1}{8}S\\
S_{BM_3C}&=\frac{1}{2}S_{BM_2C}=\frac{1}{2}\left(S-\left(\frac{1}{4}S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{8}S\right)\right)=\frac{3}{16}S\\
S_{M_1M_3M_4}&=S_{M_1M_4C}=\frac{1}{2}S_{M_1M_3C}=\frac{1}{2}\left(S-\left(\frac{1}{8}S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{4}S+\frac{3S}{16}\right)\right)\\
&=\frac{3}{32}S
\end{aligned}$$

بنابراین

$$S_{M_1M_2M_3M_4}=S_{M_1M_2M_3}+S_{M_1M_3M_4}=\frac{1}{8}S+\frac{3}{32}S=\frac{7}{32}S$$

۲۸. (۲) اگر تعداد مربع‌های قرمز و آبی را به ترتیب با a و b نمایش دهیم، و نیز اگر از میان مستطیل‌های قرمز c تا و از میان مستطیل‌های آبی d تا مربع نباشند، داریم

$$a + b = ۷,\ a + c = b + ۳,\ a = b + d + ۲$$

اگر طرفین دو معادله‌ی سمت راست را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود $c = ۱ - d$.
پس $d = ۱$ یا $d = ۰$.
اگر $d = ۰$ داریم

$$a = b + ۲,\ a + b = ۷ \Longrightarrow ۲b + ۲ = ۷$$

که ممکن نیست.
اگر $d = ۱$ داریم

$$a = b + ۳, a + b = ۷ \Longrightarrow ۲b + ۳ = ۷ \Longrightarrow b = ۲$$

پس تعداد مستطیل‌های آبی برابر است با ۳.

۲۹. (۴) در دور اول شماره‌های فرد، در دور دوم شماره‌های به شکل $۴k + ۱$، در دور سوم شماره‌های به شکل $۸k + ۱$، در دور چهارم شماره‌های به شکل $۱۶k + ۱$، و در دور پنجم شماره‌های به شکل $۳۲k + ۱$ یعنی $۱, ۳۳, ۶۵$ باقی می‌مانند. در نهایت ۳۳ و بعد هم ۱ خط می‌خورد و ۶۵ باقی می‌ماند.

۳۰. (۴) هر یک از سارا و ستاره به جای حروف KANGAROO رقم‌هایی را می‌گذارند به طوری که $O - O + R - A + G - N + A - K = R + G - N - K$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. بزرگ‌ترین عدد ممکن با شرایط مسئله برابر ۹۸۷۵۸۰۶۶، و کوچک‌ترین عدد ممکن برابر ۱۰۲۵۰۹۳۳ است. پس به جای رقم G، هر دو رقم ۵ را نوشته‌اند.