

مسابقه‌ی ریاضی کانگورو ۲۰۱۵

پاسخ مسئله‌های سه امتیازی

۱. (۵)

۲. (۱) توجه کنید که

$$(a - b)^5 = -(b - a)^5 \implies (a - b)^5 + (b - a)^5 = 0$$

۳. (۱) داریم

$$2^{2x} = 4^{x+1} \implies 4^x = 4^{x+1} \implies x = x + 1$$

ولی معادله‌ی $x = x + 1$ هیچ جوابی ندارد.

۴. (۲)

۵. (۳) داریم

$$2001 + 2031 = 2002 + 2020 = \dots = 2016 + 2017 = 2 \times 2015$$

پس

$$\frac{2001 + \dots + 2031}{31} = \frac{15 \times 2 \times 2015 + 2015}{31} = \frac{31 \times 2015}{31} = 2015$$

۶. (۴) در هر شکل، محل تقاطع دو خم را رأس گراف و خم‌ها را یال‌های گراف در نظر بگیرید. یک گراف، ویژگی ذکر شده را دارد اگر درجه‌ی تمام رأس‌های آن زوج باشد. در شکل‌های A ، C و D درجه‌ی تمام رأس‌ها برابر ۴ است.

۷. (۵) وقتی کاغذ را تا می‌کنیم هر قسمت آن، ۹ لایه کاغذ دارد. پس هر سوراخ بعد از باز شدن به ۹ سوراخ تبدیل می‌شود.

۸. (۵)

۹. (۳) اگر ضلع‌های مثلث را از کوچک به بزرگ a ، b و c بنامیم، داریم

$$a^2 + b^2 = c^2 \implies \frac{a^2\pi}{\lambda} + \frac{b^2\pi}{\lambda} = \frac{c^2\pi}{\lambda} \implies X + Y = Z$$

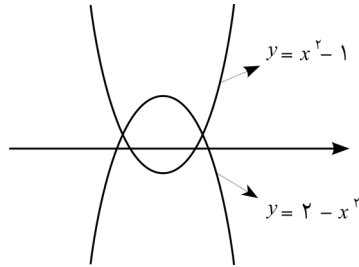
۱۰. (۵) امکان ندارد که یک چهارضلعی محدب، هیچ زاویه‌ی ??? نداشته باشد. چون در آن صورت مجموع زاویه‌هایش از $360 = 90 \times 4$ بیش‌تر خواهد شد.

پاسخ مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (۳)

$$\begin{aligned} & \sqrt{(2015 + 2015) + (2015 - 2015) + (2015 \div 2015) + (2015 \times 2015)} \\ &= \sqrt{2015^2 + 2 \times 2015 + 1} = \sqrt{(2015 + 1)^2} = 2016 \end{aligned}$$

۱۲. (۴) به شکل زیر دقت کنید:



۱۳. (۵) عددهای داخل دایره‌ها را مانند شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم: داریم

$$a = ۳ + ۵ = ۸$$

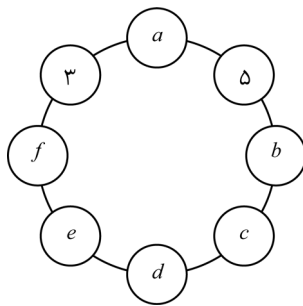
$$a + b = ۵ \implies b = ۵ - ۵ = -۳$$

$$۵ + c = b \implies c = b - ۵ = -۸$$

$$a + f = ۳ \implies f = ۳ - a = -۵$$

$$۳ + e = f \implies e = f - ۳ = -۸$$

$$d = -۸ + (۸) = -۱۶$$



اما از طرفی باید داشته باشیم $c = b + d$ ولی $-۸ \neq -۱۶ + (-۳)$.

پس چنین کاری ممکن نیست.

۱۴. (۳) داریم

$$c - d = a \implies c = a + d \implies c > a, c > d$$

همین‌طور

$$\frac{c}{e} = b \implies c = eb \implies c > e, c > b$$

۱۵. (۲) اگر این ۶ عدد را a, b, c, d, e و f بنامیم، داریم

$$\sqrt[3]{abc} = ۱۲, \quad \sqrt[3]{def} = ۳$$

$$\implies abc = ۱۲^۳, \quad def = ۳^۳$$

$$\implies \sqrt[6]{abcdef} = \sqrt[6]{۱۲^۳ \times ۳^۳} = \sqrt[6]{۳۶^۳} = ۶$$

۱۶. (۱) اگر شعاع دایره‌ی وسطی و شعاع دایره‌ی بزرگ را به ترتیب با r و R نمایش دهیم، داریم

$$\frac{\pi}{۴} = \frac{1}{۴}\pi(r^2 - ۱) = \frac{1}{۴}\pi(R^2 - r^2)$$

$$\implies r^2 - ۱ - ۱ \implies r^2 = ۲ \implies r = \sqrt{۲}$$

$$\implies R^2 - r^2 = ۱ \implies R^2 - ۲ = ۱ \implies R^2 = ۳ \implies R = \sqrt{۳}$$

پس حاصل ضرب شعاع‌ها برابر $\sqrt{۶}$ است.

۱۷. (۳) اگر قیمت اولیه‌ی خودروی اول و دوم را به ترتیب با x و y نمایش دهیم، داریم

$$۱,۴x + ۱,۶y = ۱,۵۴(x + y) \implies ۰,۰۶y = ۰,۱۴x$$

$$\implies \frac{x}{y} = \frac{۰,۰۶}{۰,۱۴} = \frac{۳}{۷}$$

۱۸. (۳) اگر A را پیشامد برنده شدن بهروز در نظر بگیریم، داریم

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{12}$$

۱۹. (۳) مجموع رقم‌های عددهای سه رقمی، دو رقمی با یک رقمی، یکی از عددهای ۱ تا ۲۷ می‌شود. زیرا اگر این عد را به شکل \overline{abc} نمایش دهیم، مجموع رقم‌های آن برابر است با

$$1 + 0 + 0 \leq a + b + c \leq 9 + 9 + 9$$

مجموع رقم‌های عددهای چهار رقمی کوچک‌تر از ۲۰۱۶ حداکثر ممکن است برابر ۲۸ (در مورد عدد ۱۹۹۹) شود پس مجموع رقم‌های روی هر یک از گوی‌ها، یکی از عددهای ۱ تا ۲۸ است. یعنی ۲۸ رنگ مختلف دارند.

۲۰. (۲) در تاس سمت راست، وجه روبه‌روی ۴ برابر ۳ و وجه روبه‌روی ۶ برابر ۱ است. پس روی وجه خواسته شده یکی از عددهای ۲ و ۵ نوشته شده است. چون دو تاس مشابه هم‌اند، پس وجهی از تاس سمت راست که به تاس سمت چپ چسبیده است، برابر ۲ است.

پاسخ مسئله‌های پنج امتیازی

۲۱. (۴) مجموع عددهای داخل جدول برابر است با

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 + \dots + 10 \\
 & + 2 + 4 + \dots + 20 \\
 & + 3 + 6 + \dots + 30 \\
 & \vdots \\
 & + 10 + 20 + \dots + 100 \\
 & = (1 + 2 + \dots + 10) + 2(1 + 2 + \dots + 10) \\
 & + 3(1 + 2 + \dots + 10) + \dots + 10(1 + 2 + \dots + 10) \\
 & = (1 + 2 + \dots + 10)(1 + 2 + \dots + 10) = 55 \times 55 = 3025
 \end{aligned}$$

۲۲. (۱) نمودار با معادله‌ی داده شده محور عمودی را در سه نقطه به عرض‌های

$$0, \sqrt{2} \text{ و } -\sqrt{2} \text{ قطع می‌کند. زیرا}$$

$$\begin{aligned}
 x = 0 & \implies (y^2)^2 = 2y^2 \implies y^4 - 2y^2 = 0 \\
 & \implies y^2(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2}) = 0 \implies y = 0 \text{ یا } y = \sqrt{2} \text{ یا } y = -\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

و خط a تنها خطی است که نمودار را در سه نقطه قطع می‌کند و یکی از نقطه‌های تقاطع دقیقاً وسط دوتای دیگر است.

۲۳. (۴)

۲۴. (۳) اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی n ضلعی منتظم برابر است با $\frac{180(n-2)}{n}$.

فقط در دو حالت زیر، حاصل این کسر عددی طبیعی می‌شود:

حالت اول:

$$n | 18^\circ \implies n | 2^2 \times 5 \times 3^2$$

پس تعداد مقسوم‌علیه‌های 18° برابر است با $18 = 2 \times 3 \times 3$. البته $n = 1$ و $n = 2$ قابل قبول نیستند. پس ۱۶ چند ضلعی در این حالت وجود دارد. حالت دوم: ولی n و $n - 2$ عامل مشترکی داشته باشند $n | 18^\circ$ داریم $2 = (n, n - 2)$ ، پس حالت دوم فقط در حالتی اتفاق می‌افتد که n عددی زوج باشد به طوری که $n | 18^\circ$ ولی $n \nmid 18^\circ$. پس n را می‌توان به شکل $2^x \times 5^y \times 3^z$ نوشت که $1 \leq x \leq 2$ و $0 \leq y \leq 6$ در کل ۶ عدد به این شکل وجود دارد.

پس روی هم ۲۲ عدد n با شرایط مسئله وجود دارند.

۲۵. (۵) این عددها عبارت‌اند از:

$$1 + 2 + \dots + 256 = 511$$

$$1 + 2 + \dots + 128 + 512 = 1023 - 256$$

$$1 + 2 + \dots + 64 + 256 + 512 = 1023 - 128$$

$$1 + 2 + \dots + 32 + 128 + 256 + 512 = 1023 - 64$$

$$1 + 2 + \dots + 16 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023 - 32$$

۲۶. (۴) اگر ضلع و وتر مثلث را به ترتیب با a و b نمایش دهیم، داریم

$$a^2 = 400 + b^2$$

a و b باید زوجیت یکسان داشته باشند، پس اختلاف آن‌ها عددی زوج است.

مثلاً $a - b = 2n$ که x عددی طبیعی است. پس داریم

$$(b + 2x)^2 = 400 + b^2 \implies b^2 + 4x^2 + 4bx = 400 + b^2 \\ \implies bx + x^2 = 100$$

طرف چپ تساوی بر x بخش پذیر است، پس طرف راست هم باید بر x بخش پذیر باشد. پس $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ از طرفی $x < 10$ چون $x^2 < 100$ پس $x \in \{1, 2, 4, 5\}$ معادله‌ی $bx + x^2 = 100$ به ازای هر یک از این عددها یک جواب دارد.

۲۷. (۳) اگر مساحت مستطیل را برابر S در نظر بگیریم، داریم

$$S_{DAM_1} = \frac{1}{4}S \\ S_{AM_1B} = \frac{1}{4}S, \quad S_{AM_1B} = \frac{1}{4}S_{AM_1B} = \frac{1}{4}S \\ S_{M_1M_1M_1} = \frac{1}{4}S_{M_1M_1B} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}S_{AM_1B} = \frac{1}{16}S$$

از طرفی

$$S_{M_1M_1C} = \frac{1}{4}S_{AM_1C} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}S = \frac{1}{16}S \\ S_{BM_1C} = \frac{1}{4}S_{BM_1C} = \frac{1}{4} \left(S - \left(\frac{1}{4}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S \right) \right) = \frac{3}{16}S \\ S_{M_1M_1M_1} = S_{M_1M_1C} = \frac{1}{4}S_{M_1M_1C} = \frac{1}{4} \left(S - \left(\frac{1}{16}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{4}S + \frac{3}{16}S \right) \right) \\ = \frac{3}{32}S$$

بنابراین

$$S_{M_1M_1M_1M_1} = S_{M_1M_1M_1} + S_{M_1M_1M_1} = \frac{1}{16}S + \frac{3}{32}S = \frac{5}{32}S$$

۲۸. (۲) اگر تعداد مربع‌های قرمز و آبی را به ترتیب با a و b نمایش دهیم، و نیز اگر از میان مستطیل‌های قرمز c تا و از میان مستطیل‌های آبی d تا مربع نباشند، داریم

$$a + b = 7, a + c = b + 3, a = b + d + 2$$

اگر طرفین دو معادله‌ی سمت راست را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود $c = 1 - d$.

$$d = 1 \text{ یا } d = 0.$$

اگر $d = 0$ داریم

$$a = b + 2, a + b = 7 \implies 2b + 2 = 7$$

که ممکن نیست.

اگر $d = 1$ داریم

$$a = b + 3, a + b = 7 \implies 2b + 3 = 7 \implies b = 2$$

پس تعداد مستطیل‌های آبی برابر است با ۳.

۲۹. (۴) در دور اول شماره‌های فرد، در دور دوم شماره‌های به شکل $4k + 1$ ،

در دور سوم شماره‌های به شکل $8k + 1$ ، در دور چهارم شماره‌های به شکل

$16k + 1$ ، و در دور پنجم شماره‌های به شکل $32k + 1$ یعنی ۱، ۳۳، ۶۵،

باقی می‌مانند. در نهایت ۳۳ و بعد هم ۱ خط می‌خورد و ۶۵ باقی می‌ماند.

۳۰. (۴) هر یک از سارا و ستاره به جای حروف KANGAROO رقم‌هایی

را می‌گذارند به طوری که $O - O + R - A + G - N + A - K =$

$R + G - N - K$ بر ۱۱ بخش پذیر باشد. بزرگ‌ترین عدد ممکن با شرایط

مسئله برابر 98758066 ، و کوچک‌ترین عدد ممکن برابر 10250933 است.

پس به جای رقم G ، هر دو رقم ۵ را نوشته‌اند.