راه‌حل مسئله‌های ریاضیات کانگورو ۱۳۹۸
پایه‌های یازدهم و پیش‌دانشگاهی

پاسخ مسئله‌های سه امتیازی

۱. (۱) مجموع عرض مستطیل‌های سفید و خاکستری روشن برابر با طول مستطیل خاکستری تیره است. مستطیل‌ها هم‌نهشت‌اند. پس طول هر مستطیل، دو برابر عرض آن است.

۲. (۵) تنها حالتی که مجموع دوتا از این اعداد برابر ۴ بشود، ۳ + ۱ است. پس اعداد ۱ و ۳ با هم در یک سطر یا یک ستون قرار دارند. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم ۱ و ۳ در یک سطر نوشته شده‌اند.

برای این‌که مجموع دوتا از این اعداد برابر ۵ بشود، دو حالت داریم: ۴ + ۱ و ۲ + ۳. پس یا ۴ و ۱ با هم در یک ستون‌اند یا ۲ و ۳. هر یک از این دو حالت به شکلی شبیه شکل زیر می‌انجامد:

۳	**۱**
۲	**۴**

پس دو حاصل‌جمع دیگر ۵ و ۶ هستند.

۳. (۵) درگزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) دقیقاً نصف مساحت مستطیل سایه‌خورده است، زیرا مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع. و در هر یک از سه شکل اول، ارتفاع مثلث‌ها برابر عرض (یا طول) مستطیل است و مجموع قاعده‌های مثلث‌ها برابر است با طول (یا عرض) مستطیل. پس در هر شکل، مجموع مساحت مثلث‌ها برابر است با نصف مساحت مستطیل.

درگزینهٔ (۴) کمتر از نصف مساحت مستطیل سایه‌خورده است، چون مجموع قاعده‌های مثلث‌ها از طول مستطیل کمتر است و ارتفاعشان برابر عرض مستطیل است.

درگزینهٔ (۵) مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده از نصف مساحت مستطیل بیشتر است، زیرا یک مستطیل هم بین ناحیه‌های سایه‌خورده وجود دارد.

۴. (۴) فقط در این گزینه است که حلقهٔ سفید به دو حلقهٔ دیگر متصل است و دو حلقهٔ دیگر به هم متصل نیستند.

۵. (۳) این هرم ۲۳ وجه مثلث و یک قاعدهٔ ۲۳ ضلعی دارد. پس ۲۳ ضلع در قاعده و ۲۳ یال جانبی دارد، پس در کل ۴۶ یال دارد.

۶. (۲) اگر رقم‌های پوشانده شده را با x، y و z نمایش بدهیم، داریم:

$$\begin{array}{r} ۷۲۴۳ \\ +\ \ xy۲۶ \\ +\ \ ۲۱z۷ \\ \hline ۱۱۱۲۶ \end{array}$$

می‌توانیم رقم‌های صدگان و هزارگان دو عدد پایینی را با هم جابه‌جا کنیم و همچنان حاصل‌جمع تغییری نمی‌کند. یعنی:

$$\begin{array}{r} ۷۲۴۳ \\ +\ \ ۲۱۲۶ \\ +\ \ xyz۷ \\ \hline ۱۱۱۲۶ \end{array}$$

و $۹۳۶۹ = ۲۱۲۶ + ۷۲۴۳$، یعنی $xyz۷ = ۱۱۱۲۶ - ۹۳۹۶ = ۱۷۵۷$.

۷. (۲) برای این‌که کوچک‌ترین عدد با مجموع ارقام ۲۰۱۹ داشته باشیم، لازم است تعداد ارقام تا جای ممکن کم باشد. برای این کار لازم است تا جایی که می‌توانیم از رقم ۹ استفاده کنیم. داریم: $۲۰۱۹ = ۲۲۴ \times ۹ + ۳$. پس باید این عدد از ۲۲۴ رقم ۹ و یک رقم ۳ ساخته شده باشد. برای این‌که کوچک‌ترین عدد ممکن بشود، لازم است رقم سمت چپ ۳ باشد.

۸. (۳) در این تاس باید روی سه‌تا از وجه‌ها عدد ۱، روی دوتا از وجه‌ها عدد ۲ و روی یکی از وجه‌ها عدد ۳ نوشته شده باشد. در حالی‌که در گزینهٔ (۳)، روی دوتا از وجه‌ها عدد ۳ دیده می‌شود.

۹. (۴) با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$c-(b-a)=(c-b)-a \Rightarrow c-b+a=c-b-a \Rightarrow ۲a=۰ \Rightarrow a=۰$$

۱۰. (۴) داریم $۲^{۱۰} \times ۱ = ۲^{۱۰}$، $۲^{۱۰} \times ۸ = ۲^{۱۳}$. پس عددهای $۲^{۱۰} \times ۱, ۲^{۱۰} \times ۲, ۲^{۱۰} \times ۳, \ldots, ۲^{۱۰} \times ۸$ تنها عددهایی از بین اعداد داده شده هستند که بر $۲^{۱۰}$ بخش‌پذیرند.

پاسخ مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (۴)

$$۷!+۸!+۹! = ۷!(۱+۸+۹\times۸) = ۸۱\times۷! = ۳^{۴}\times۳\times۶\times۷\times۵\times۴\times۲\times۱ = ۳^{۶}\times۷\times۵\times۱۶$$

۱۲. (۲) اگر تعداد دانش‌آموزان عینکی و بی‌عینک سال گذشته را به ترتیب با x و y نشان دهیم، داریم:

$$\frac{۱۲۰}{۱۰۰}x+\frac{۸۰}{۱۰۰}y=x+y+۱ \Rightarrow \frac{۶}{۵}x+\frac{۴}{۵}y=x+y+۱$$

x و y هر دو باید بر ۵ بخش‌پذیر باشند، یعنی $x = 5x', y = 5y'(x', y' \in \mathbb{N})$. بنابراین:

$$6x' + 4y' = 5x' + 5y' + 1 \Rightarrow x' = y' + 1$$

تعداد دانش‌آموزان امسال برابر است با $x + y + 1 = 5x' + 5y' + 1 = 5(y' + 1) + 5y' + 1 = 10y' + 6$، پس یکان تعداد دانش‌آموزان امسال باید برابر ۶ باشد و تنها گزینهٔ (۲) این شرط را دارد.

۱۳. (۵) اگر طول وجه‌های مکعب‌مستطیل را به ترتیب از کوچک به بزرگ با x، y و z نشان دهیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} 2yz = 3xz \Rightarrow y = \frac{3}{2}x \\ 5xy = 120 \Rightarrow xy = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 6,$$

$$5xy = 2yz \Rightarrow z = \frac{5}{2}x = 10$$

پس حجم مکعب‌مستطیل برابر است با: $4 \times 6 \times 10 = 240\ \mathrm{m}^3$.

۱۴. (۵) اگر بهرام کلاه نداشته باشد، پرهام حتماً کلاه دارد. حالا که پرهام کلاه ندارد، حتماً بهرام کلاه دارد. (در غیر این‌صورت، پرهام کلاه می‌داشت.) ولی از این‌که بهرام کلاه دارد، نمی‌توانیم نتیجه‌ای دربارهٔ کلاه داشتن یا نداشتن اردشیر بگیریم.

۱۵. (۴) با کشیدن نقطهٔ P، قرقرهٔ وسطی به اندازهٔ نصف جابه‌جایی P بالا می‌آید؛ یعنی ۱۲سانتی‌متر. قرقرهٔ پایینی هم نصف این مقدار بالا می‌آید؛ یعنی ۶ سانتی‌متر.

۱۶. (۳) n و $n - 6$ هر دو بر $n - 6$ بخش‌پذیرند، پس تفاضلشان یعنی ۶ هم باید بر $n - 6$ بخش‌پذیر باشد. بنابراین $n - 6$ فقط می‌تواند برابر یکی از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۶ باشد. یعنی n می‌تواند برابر یکی از اعداد ۷، ۸، ۹ و ۱۲ باشد. از این بین، تنها $n = 8$ شرط مسئله را ندارد.

۱۷. (۱) پیشامدها را به شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

A: احمد بار اول شکلات بردارد.

B: محمود بار اول آدامس بردارد.

C: احمد بار دوم شکلات بردارد.

D: محمود بار دوم آدامس بردارد.

محمود در یکی از دو حالت زیر می‌تواند برنده شود:

- احمد بار اول شکلات، و محمود آدامس بردارد. یعنی پیشامد $A \cap B$ اتفاق بیفتد. داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

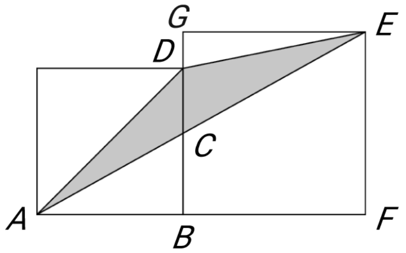
- احمد بار اول و دوم شکلات بردارد و محمود بار اول شکلات، و بار دوم آدامس بردارد. یعنی پیشامد $A \cap B' \cap C \cap D$ اتفاق بیفتد. داریم:

$$P(A \cap B' \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B'|A) \cdot P(C|A \cap B') \cdot P(D|A \cap B' \cap C) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

بنابراین، احتمال برد محمود برابر است با: $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

۱۸. (۲) در شکل زیر اگر طول BC را برابر x در نظر بگیریم، با توجه به تشابه دو مثلث ABC و AEF داریم:

$$\frac{CB}{AB}=\frac{EF}{AF}\Rightarrow\frac{x}{a}=\frac{b}{a+b}\Rightarrow x=\frac{ab}{a+b}$$



از طرفی

$$S_{\triangle ADE}=\frac{۱}{۲}AB\times DC+\frac{۱}{۲}EG\times DC=\frac{۱}{۲}DC(AB+EG)=\frac{۱}{۲}(a-x)(a+b)$$
$$=\frac{۱}{۲}\left(a-\frac{ab}{a+b}\right)(a+b)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{a^{۲}+ab-ab}{a+b}\right)(a+b)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{a^{۲}}{a+b}\right)(a+b)=\frac{a^{۲}}{۲}$$

۱۹. (۱)

$$A=\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰}}}}}$$

داریم: $۴<\sqrt{۲۰}<۵$. پس:

$$\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+۴}}}}<A<\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+۵}}}}$$

از طرفی

$$\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+۵}}}}=\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+۵}}}=\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+۵}}=\sqrt{۲۰+۵}=۵$$

و همچنین

$$\sqrt{۲۴}>۴\Rightarrow\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۴}}}}>\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+۴}}}>\sqrt{۲۰+\sqrt{۲۰+۴}}>\sqrt{۲۰+۴}>۴$$

پس $۴<A<۵$ و در نتیجه $[A]=۴$.

۲۰. (۵) با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{cases}a+\dfrac{b}{c}=۱۱\\[2mm] b+\dfrac{a}{c}=۱۴\end{cases}$$

با جمع‌کردن دو معادلهٔ بالا خواهیم داشت: $a+b+\frac{a+b}{c}=۲۵$. اگر قرار دهیم $x=\frac{a+b}{c}$، داریم:

$$cx+x=۲۵\Rightarrow x(c+۱)=۲۵$$

از طرفی می‌دانیم a، b، c، $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ همگی اعدادی صحیح‌اند. پس $x=\frac{a+b}{c}$ و $c+۱$ هم صحیح‌اند. پس x یکی از شمارنده‌های ۲۵ است.

- $x = 25 \Rightarrow c + 1 = 1 \Rightarrow c = 0$

که امکان ندارد.

- $x = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = 1 \Rightarrow c = a + b$

در این‌صورت a و b هر دو باید از c کوچک‌تر باشند و در نتیجه امکان ندارد $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ اعدادی صحیح باشند.

- تنها حالتی که باقی می‌ماند این است که x برابر ۵ باشد: $x = 5 \Rightarrow c + 1 = 5 \Rightarrow c = 4$.

در نتیجه دستگاه معادله به شکل زیر در می‌آید

$$\begin{cases} a + \dfrac{b}{4} = 1 \\ b + \dfrac{a}{4} = 14 \end{cases}$$

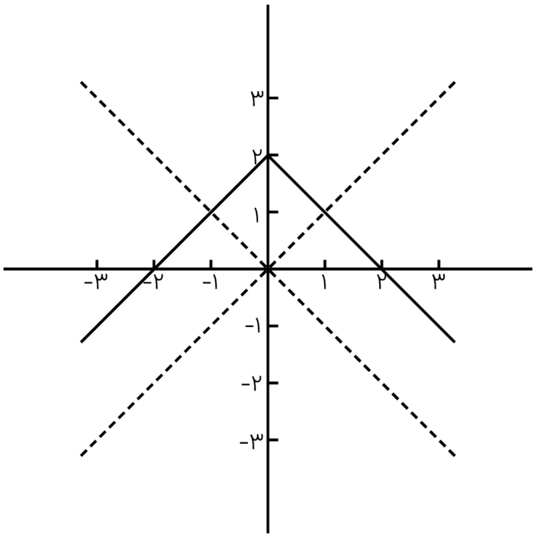
و $a = 8$، $b = 12$ جواب دستگاه بالا هستند.

پاسخ مسئله‌های پنج امتیازی

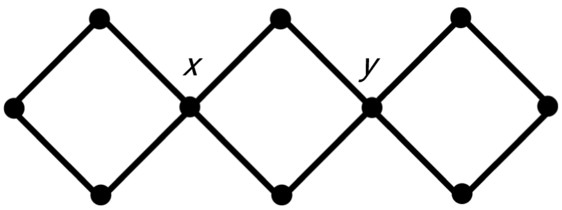
۲۱. (۲) $2^{10} = 1024$. پس شمارنده‌های مثبت ۱۰۲۴ این‌ها هستند: $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^9, 2^{10}$ پس:

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^9 + 2^{10} = 2^{11} - 1 \\ b &= 1 \times 2 \times 2^2 \times 2^3 \times 2^4 \times \cdots \times 2^9 \times 2^{10} = 2^{1+2+\cdots+10} = 2^{55} \end{aligned}\right\} \Rightarrow b = (a+1)^5$$

۲۲. (۲) نمودار $y = 2 - |x|$ به‌صورت خط ممتد و دو خط $y = x$ و $y = -x$ به‌صورت خط‌چین در شکل زیر رسم شده‌اند. خط $y = ax$ خطی با شیب a است که از مبدأ می‌گذرد. با توجه به شکل، برای این‌که معادلهٔ $ax = 2 - |x|$ دو جواب داشته باشد، لازم است شیب خط $y = ax$ بزرگ‌تر از -1 و کوچک‌تر از ۱ باشد؛ یعنی $-1 < \alpha < 1$.



۲۳. (۳) فرض کنید مجموع اعداد روی چهار رأس هر مربع برابر k باشد و عددهای روی رئوس مربع وسط را مانند شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم.



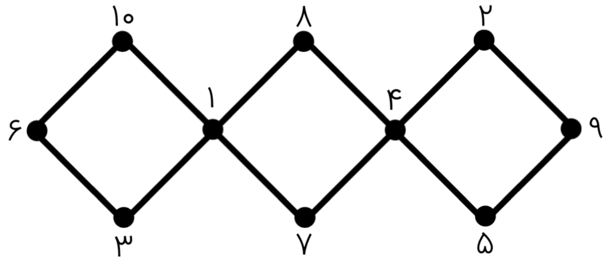
حالا اگر مجموع اعداد روی رئوس چهار مربع را با هم جمع کنیم، اعداد x و y تنها اعدادی هستند که دو بار ظاهر می‌شوند. پس داریم:

$$۱ + ۲ + \cdots + ۱۰ + x + y = ۳k \Rightarrow ۵۵ + x + y = ۳k$$

برای این‌که $۵۵ + x + y$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد، لازم است باقیماندهٔ $x + y$ بر ۳ برابر ۲ باشد. از طرفی برای این‌که k کمترین مقدار ممکن بشود، لازم است $x + y$ کمترین مقدار ممکن باشد.

$x + y$ نمی‌تواند برابر ۲ باشد، چون x و y اعداد طبیعی متمایزند. پس کمترین مقدار ممکن برای $x + y$ برابر ۵ است. در این حالت داریم: $۳k = ۶۰ \Rightarrow k = ۲۰$.

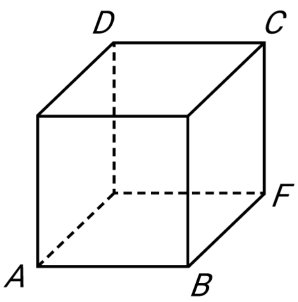
شکل زیر یکی از حالت‌هایی را نشان می‌دهد که می‌توانیم اعداد ۱ تا ۱۰ را رئوس مربع‌ها قرار دهیم طوری‌که مجموع رئوس هر مربع برابر ۲۰ بشود:



۲۴. (۵) سه دسته صفحه، شرط مسئله را دارند:

- ۶ صفحه‌ای که از وجه‌های مکعب می‌گذرند.
- صفحه‌هایی که از دو رأس مجاور هم و دو رأس مجاور روی وجه روبه‌رویی می‌گذرند. (صفحه‌ای که از رئوس A، B، C و D می‌گذرد، یکی از این صفحه‌هاست.)

به‌ازای هر یال از مکعب، یکی از این صفحه‌ها وجود دارد. ولی هر کدام از این صفحه‌ها از دو تا از یال‌های مکعب می‌گذرند. پس تعداد این صفحه‌ها برابر نصف تعداد یال‌های مکعب، یعنی ۶ تاست.



- صفحه‌هایی که از سه رأس مکعب می‌گذرند. این سه رأس، روی دو وجه مجاور هم قرار دارند. همچنین هر دو رأس از این سه رأس، رئوس روبه‌روی هم در یک وجه هستند. (صفحه‌ای که از رئوس A، F و D می‌گذرد، یکی از این صفحه‌هاست.)

اگر روی هر یک از این صفحه‌ها مکعب را برش بزنیم، یکی از کنج‌های مکعب جدا می‌شود؛ پس تعداد این صفحه‌ها برابر تعداد رأس‌های مکعب، یعنی ۸ تاست.

پس تعداد کل صفحه‌های سه دسته برابر است با: $۶ + ۶ + ۸ = ۲۰$.

۲۵. (۱) هر یک از خط‌ها سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند. معادلهٔ هر یک از این خط‌ها به شکل $y = ax$ است. جواب‌های معادلهٔ

$x^۲ - ۲ = ax$ طول دو نقطهٔ برخورد را مشخص می‌کند:

$$x^۲ - ۲ = ax \Rightarrow x^۲ - ax - ۲ = ۰$$

و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ بالا برابر است با ۲−. پس اگر جواب‌های هر چهار معادله را در هم ضرب کنیم، حاصل برابر می‌شود با: $(-۲) \times (-۲) \times (-۲) \times (-۲) = ۱۶$.

۲۶. (۴) $n^۲ - ۲n - ۳ = (n-۳)(n+۱)$. و برای این‌که $|n^۲ - ۲n - ۳|$ عددی اول باشد، لازم است یکی از اعداد $n - ۳$ و $n + ۱$ برابر ۱ یا ۱− باشد. پس چهار معادلهٔ زیر را داریم:

$$n - ۳ = ۱ \Rightarrow n = ۴ \Rightarrow |n^۲ - ۲n - ۳| = ۵$$

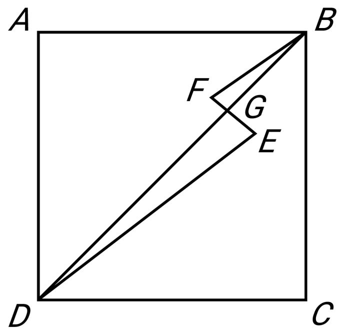
$$n - ۳ = -۱ \Rightarrow n = ۲ \Rightarrow |n^۲ - ۲n - ۳| = ۳$$

$$n + ۱ = ۱ \Rightarrow n = ۰ \Rightarrow |n^۲ - ۲n - ۳| = ۳$$

$$n + ۱ = -۱ \Rightarrow n = -۲ \Rightarrow |n^۲ - ۲n - ۳| = ۵$$

۲۷. (۵) دو مثلث BFG و DEG با هم متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{FG}{GE} = \frac{۲}{۵},\ FG + GE = ۱ \Rightarrow FG = \frac{۲}{۷},\ GE = \frac{۵}{۷}$$



همچنین

$$DB = DG + GB = \sqrt{۲۵ + \frac{۲۵}{۴۹}} + \sqrt{۴ + \frac{۴}{۴۹}} = \sqrt{\frac{۴۹ \times ۲۵ + ۲۵}{۴۹}} + \sqrt{\frac{۴۹ \times ۴ + ۴}{۴۹}}$$

$$= \sqrt{\frac{۵۰ \times ۲۵}{۴۹}} + \sqrt{\frac{۵۰ \times ۴}{۴۹}} = \frac{۲۵\sqrt{۲}}{۷} + \frac{۱۰\sqrt{۲}}{۷} = \frac{۳۵\sqrt{۲}}{۷} = ۵\sqrt{۲}$$

پس طول ضلع مربع برابر ۵ است.

۲۸. (۳) چند جملهٔ اول این دنباله به شکل زیر است:

$$۴۹, ۱۹۶, ۲۸۹, ۴۰۰, ۲۵, ۶۴, ۱۲۱, ۲۵, ۶۴, ۱۲۱, \ldots$$

پس به‌ازای $n \geq ۶$، اگر n مضربی از ۳ باشد داریم: $a_n = ۶۴$ و ۲۰۱۹ هم بر ۳ بخش‌پذیر است. پس $a_{۲۰۱۹} = ۶۴$.

۲۹. (۲) فضای نمونه‌ای عبارت است از مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های سه‌عضوی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰\}$، بنابراین

$$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$$

اگر A پیشامدی باشد که یکی از عددها برابر میانگین دو عدد دیگر باشد، داریم:

$$A = \{\{۱,۲,۳\}, \{۱,۳,۵\}, \{۱,۴,۷\}, \{۱,۵,۹\}, \{۲,۳,۴\}, \{۲,۴,۶\}, \{۲,۵,۸\}, \{۲,۶,۱۰\}, \{۳,۴,۵\}, \{۳,۵,۷\},$$
$$\{۳,۶,۹\}, \{۴,۵,۶\}, \{۴,۶,۸\}, \{۴,۷,۱۰\}, \{۵,۶,۷\}, \{۵,۷,۹\}, \{۶,۷,۸\}, \{۶,۸,۱۰\}, \{۷,۸,۹\}, \{۸,۹,۱۰\}\}$$

پس $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۶}$.

۳۰. (۳) مجموع کل اعداد درون جدول برابر است با: $۷۵ = (۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱) \times ۵$. پس مجموع اعداد درون هر یک از سه ناحیه برابر است با: $\frac{۷۵}{۳} = ۲۵$.

در ناحیهٔ پایینی، مجموع اعداد ۵ خانهٔ خالی باید برابر ۲۳ بشود. تنها حالت ممکن این است که درون دو تا از خانه‌ها ۴ و درون سه تای دیگر، عدد ۵ نوشته شود. با توجه به این‌که در یک سطر و ستون نمی‌توانیم عدد تکراری داشته باشیم، پس اعداد ناحیهٔ پایینی به شکل زیر هستند:

				؟
۵				
۴	۵			
۲	۴	۵		

در ناحیهٔ بالایی نمی‌توانیم در خانه‌های خاکستری عدد ۵ بنویسیم، زیرا در سطر یا ستونشان در ناحیهٔ پایینی عدد ۵ نوشته شده است. پس اعداد درون این خانه‌ها حداکثر برابر ۴ است. از طرفی در چهار خانهٔ باقی‌ماندهٔ ناحیهٔ بالایی، حداکثر دو عدد ۵ می‌تواند قرار بگیرد. از طرفی داریم: $۳ + ۴ + ۴ + ۴ + ۵ + ۵ = ۲۵$. پس لازم است در خانه‌های ناحیهٔ بالایی دقیقاً سه‌تا ۴، دوتا ۵ و یک ۳ نوشته شود. زیرا در غیر این‌صورت، مجموع اعداد خانه‌ها کمتر از ۲۵ خواهد شد. تنها حالت ممکن برای این کار، شکل زیر است:

		۴	۵	۳
			۴	۵
۵				۴
۴	۵			
۲	۴	۵		