راه‌حل مسئله‌های ریاضیات کانگورو ۱۳۹۸
پایه‌های نهم و دهم

پاسخ مسئله‌های سه امتیازی

۱. (۴)

$$۲۰ \times ۱۹ + ۲۰ + ۱۹ = ۲۰ \times (۱۹ + ۱) + ۱۹ = ۴۱۹$$

۲. (۲) این قطار شش دور را در ۶ دقیقه و ۶۶ ثانیه، یعنی ۷ دقیقه و ۶ ثانیه طی می‌کند.

۳. (۵)

۴. (۳) کمترین مقدار ممکن برای مجموع سه تاس برابر ۳ و بیشترین مقدار ممکن برابر ۱۸ است و تمام مقدارهای بین این دو عدد هم می‌تواند مجموع سه تاس باشد.

۵. (۲) اگر هر یک از لیوان‌های کج را صاف کنیم، سطح آب روی درجه‌ای قرار می‌گیرد که میانگین درجهٔ دوی سمت آب در حالت کج شده است. در نتیجه تمام لیوان‌ها به اندازهٔ ۶ درجه آب دارند به‌جز گزینهٔ (۲) که به اندازهٔ ۶٫۵ درجه آب دارد.

۶. (۲) براساس اصل ضرب، مونا به $۴ \times ۵ = ۲۰$ حالت می‌تواند این کار را انجام دهد.

۷. (۳) حداکثر وزن سبک‌ترین کانگورو در حالتی اتفاق می‌افتد که اختلاف وزن کانگوروها کمترین مقدار ممکن باشد. اگر وزن‌هایشان یک کیلوگرم تفاوت داشته باشد و وزن کانگوروی وسطی x باشد. داریم:

$$x - ۱ + x + x + ۱ = ۹۷ \Rightarrow ۳x = ۹۷$$

که این معادله جواب صحیح ندارد. پس حالتی را در نظر می‌گیریم که اختلاف وزن دوتا از کانگوروها یک کیلوگرم و اختلاف وزن دوتای دیگر

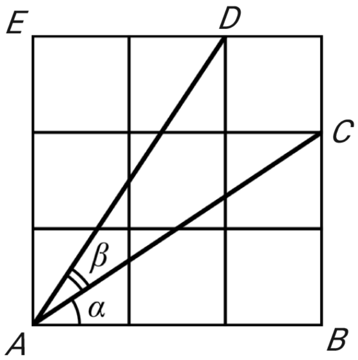
دو کیلوگرم باشد. در این‌صورت یکی از دو معادلهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$x - ۲ + x + x + ۱ = ۹۷$$

$$x - ۱ + x + x + ۲ = ۹۷$$

که از این بین، معادلهٔ پایینی جواب صحیح دارد. از این معادله نتیجه می‌شود $x = ۳۲$. پس وزن کانگوروی سبک‌تر، ۳۱ کیلوگرم است.

۸. (۲) با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ABC و ADE داریم: $\angle ADE = \alpha$. پس $۲\alpha + \beta = ۹۰^\circ$.



۹. (۱) درگزینه‌های (۲)، (۳)، (۴) و (۵) دقیقاً نصف مساحت مربع سایه‌خورده است، زیرا مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع. و در هر یک از این چهار شکل، ارتفاع مثلث‌ها برابر طول ضلع مربع است و مجموع قاعده‌های مثلث‌ها برابر است با طول ضلع مربع. پس در هر شکل، مجموع مساحت مثلث‌ها برابر است با نصف مساحت مربع.

درگزینهٔ (۱) مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده از نصف مساحت مربع بیشتر است، زیرا یک مستطیل هم در بین ناحیه‌های سایه‌خورده وجود دارد.

۱۰. (۲) اگر رقم‌های پوشانده شده را با x، y و z نمایش بدهیم، داریم:

$$\begin{array}{r} ۱۵۷۲۸ \\ + \, x\,y\,۳۳۱ \\ \underline{+ \, ۲۲\,z\,۰۴} \\ ۵۷۲۶۳ \end{array}$$

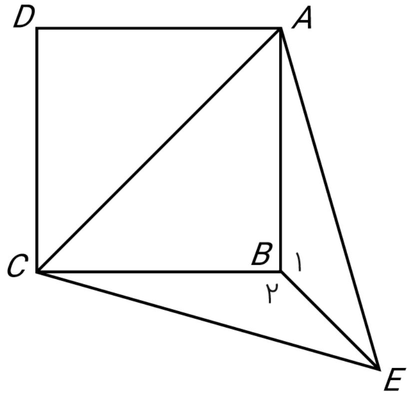
می‌توانیم رقم‌های صدگان و هزارگان دو عدد پایینی را با هم جابه‌جا کنیم و همچنان حاصل‌جمع تغییری نمی‌کند. یعنی:

$$\begin{array}{r} ۱۵۷۲۸ \\ + \, ۲۲۳۳۱ \\ \underline{+ \, x\,y\,z\,۰۴} \\ ۵۷۲۶۳ \end{array}$$

و $۱۵۷۲۸ + ۲۲۳۳۱ = ۳۸۰۵۹$، یعنی $xyz۰۴ = ۵۷۲۶۳ - ۳۸۰۵۹ = ۱۹۲۰۴$.

پاسخ مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (۳) مربع به شکل زیر است:



دو مثلث EBC و ABE به حالت سه ضلع با هم هم‌نهشت‌اند. پس:

$$\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \Rightarrow \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۲\hat{B}_۱ = ۳۶۰ - ۹۰ = ۲۷۰ \Rightarrow \hat{B}_۱ = ۱۳۵$$

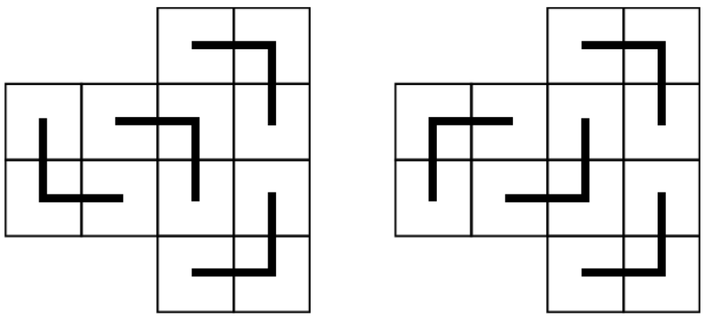
۱۲. (۳) برای کمترین حالت $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$، باید a و c را تا جای ممکن کوچک و b و d را تا جای ممکن بزرگ انتخاب کنیم. یعنی کافی است از بین دو حالت $\frac{۱}{۱۰} + \frac{۲}{۹}$ و $\frac{۱}{۹} + \frac{۲}{۱۰}$ انتخاب کنیم، داریم:

$$\frac{۲}{۱۰} + \frac{۱}{۹} = \frac{۲۸}{۹۰} = \frac{۱۴}{۴۵}, \quad \frac{۱}{۱۰} + \frac{۲}{۹} = \frac{۲۹}{۹۰}$$

که $\frac{۲۸}{۹۰} = \frac{۱۴}{۴۵}$ از $\frac{۲۹}{۹۰}$ کوچک‌تر است.

۱۳. (۵) فرض می‌کنیم ابعاد این پرچم ۵×۳ است. مستطیل‌های سفید، خاکستری تیره و خاکستری روشن با هم هم‌نهشت‌اند، پس طول و عرضشان با هم برابر است. پس عرض مستطیل سفید برابر ۱ است. مساحت مستطیل سیاه برابر است با: $\frac{۱}{۴} \times ۳ \times ۵ = \frac{۱۵}{۴}$. پس عرض مستطیل سیاه برابر است با: $\frac{\frac{۱۵}{۴}}{۳} = \frac{۵}{۴}$. در نتیجه طول مستطیل سفید برابر است با: $۵ - \frac{۵}{۴} = \frac{۱۵}{۴}$. بنابراین نسبت عرض مستطیل سفید به طول آن برابر است با: $\frac{۱}{\frac{۱۵}{۴}} = \frac{۴}{۱۵}$.

۱۴. (۲) فقط به دو صورت زیر می‌توان شکل را پوشاند:

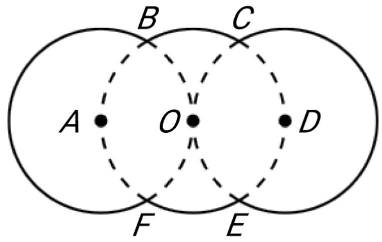


۱۵. (۴) اگر طول مسیر را با x نشان دهیم، داریم:

$$\frac{۳}{۴}x + \frac{۱}{۵}x + ۲ = x \Rightarrow ۲ = x - \frac{۳}{۴}x - \frac{۱}{۵}x = x\left(۱ - \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۵}\right) = \frac{۱}{۲۰}x \Rightarrow x = ۴۰ \text{ km}$$

۱۶. (۲) در هر لیتر شربت خوراکی، $\frac{۱}{۸}$ لیتر شربت غلیظ وجود دارد. پس برای دو لیتر شربت، به $\frac{۱}{۴}$ لیتر شربت غلیظ احتیاج داریم؛ یعنی $\frac{۱}{۲}$ شربتی که در ظرف موجود است.

۱۷. (۱) در شکل، اندازهٔ هر یک از کمان‌های AB، BC، CD، DE، EF، FA، FO، OB، OC و OE برابر ۶۰ درجه است.



پس $\frac{۴}{۶}$ از محیط‌های دو دایرهٔ کناری و $\frac{۲}{۶}$ از محیط دایرهٔ وسطی در محیط شکل آمده است. از آنجا که محیط سه دایره با هم برابر است، پس محیط شکل $\frac{۴}{۶}+\frac{۴}{۶}+\frac{۲}{۶}=\frac{۱۰}{۶}$ برابر محیط هر یک از دایره‌هاست؛ یعنی: $\frac{۱۰}{۶}\times ۲\pi R=\frac{۱۰\pi R}{۳}$.

۱۸. (۳) با توجه به اطلاعات مسئله داریم: $۱۰a+b=۳a+۴b$، پس $۷a=۳b$. چون a و b ارقام یک عددند، پس تنها حالتی که وجود دارد این است: $a=۳,\ b=۷$.

۱۹. (۴) تعداد جعبه‌ها باید شمارندهٔ ۶۰ باشد (چون تعداد سیب‌های هر جعبه یکسان است). از طرفی تعداد جعبه‌ها نمی‌تواند بیش از ۱۰ تا باشد، چون در غیر این‌صورت باید بتوانیم عدد ۶۰ را به‌صورت مجموع بیش از ۱۰ عدد طبیعی متمایز بنویسیم، در حالی‌که داریم: $۱+۲+\cdots+۱۰+۱۱=۶۶$ که نشان می‌دهد مجموع هر ۱۱ عدد طبیعی متمایز، از ۶۰ بیشتر است. می‌توانیم ۶۰ را به‌صورت مجموع ۱۰ عدد طبیعی متمایز بنویسیم:

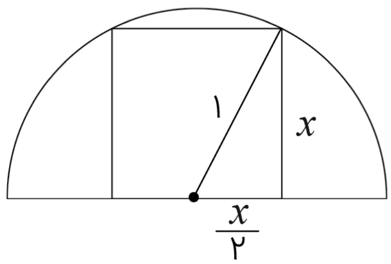
$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۵=۶۰$$

۲۰. (۵) برای بستن گستردهٔ چندوجهی، لازم است مثلث بالایی را روی یال‌های بالایی نوار کاغذی بچرخانیم و مثلث پایینی را روی یال‌های پایینی. در نتیجه یال x روی یال ۵ قرار می‌گیرد.

پاسخ مسئله‌های پنج امتیازی

۲۱. (۱) اگر طول ضلع مربع را با x نمایش دهیم، با توجه به شکل زیر و با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$x^{۲}+\frac{x^{۲}}{۴}=۱\Rightarrow\frac{۵x^{۲}}{۴}=۱\Rightarrow x^{۲}=\frac{۴}{۵}$$



۲۲. (۵) هر یک از این دو نقطه روی دایره‌ای می‌چرخد که مرکزش، مرکز دیسک و شعاعش فاصلهٔ آن نقطه تا مرکز دیسک است. اگر شعاع این دو دایره را با $r_۱$ و $r_۲$، و محیط این دو دایره را با $P_۱$ و $P_۲$ نشان دهیم، همچنین t زمانی باشد که دیسک یک دور می‌چرخد، داریم:

$$\frac{\frac{P_۱}{t}}{\frac{P_۲}{t}} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{P_۱}{P_۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۲\pi r_۱}{۲\pi r_۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{r_۱}{r_۲} = \frac{۵}{۲}$$

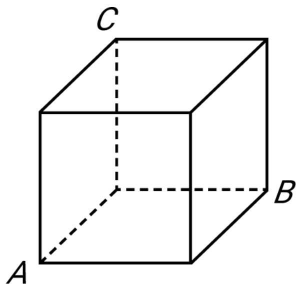
از طرفی $r_۱ = r_۲ + ۳$، پس:

$$\frac{r_۲ + ۳}{r_۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow ۲r_۲ + ۶ = ۵r_۲ \Rightarrow ۳r_۲ = ۶ \Rightarrow r_۲ = ۲ \Rightarrow r_۱ = ۵$$

۲۳. (۲) بعد از سومین دسته، اعداد دورقمی در دسته‌ها ظاهر می‌شوند. در هر یک از این دسته‌ها سه رقم آمده، پس در دو دستهٔ پشت سرهم، سه عدد دورقمی ظاهر شده است که عدد آخری مضرب ۳ است. یعنی از دستهٔ چهارم به بعد، دسته‌های با شمارهٔ فرد، به یک عدد دورقمیِ مضرب ۳ ختم شده‌اند. مثلاً دستهٔ پنجم به ۱۲ و دستهٔ هفتم به عدد ۱۵ ختم شده است و بقیهٔ دسته‌ها هم به همین ترتیب.

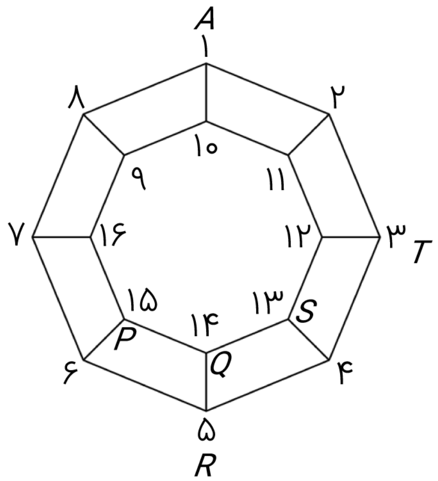
دسته‌های قبلی گزینه‌های (۱) تا (۵) به ترتیب به عددهای دورقمی ۲۱، ۴۳، ۴۵، ۶۳ و ۸۷ ختم شده‌اند. از این بین، عدد ۴۳ مضرب ۳ نیست و امکان ندارد دسته‌ای به این عدد دورقمی ختم شود.

۲۴. (۴) دنبال صفحه‌هایی هستیم که دقیقاً از سه رأس مکعب می‌گذرند. این سه رأس روی دو وجه مجاور هم قرار دارند، همچنین هر دو رأس از این سه رأس، رئوس روبه‌روی هم در یک وجه هستند. (صفحه‌ای که از رئوس A، B و C می‌گذرد، یکی از این صفحه‌هاست.)



اگر روی هر یک از این صفحه‌ها مکعب را برش بزنیم، یکی از کنج‌های مکعب جدا می‌شود. پس تعداد این صفحه‌ها برابر تعداد رأس‌های مکعب، یعنی ۸ تاست.

۲۵. (۳) رأس‌های گراف را مانند شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم:



مورچه به هر ترتیبی که روی یال‌های گراف حرکت کند، یکی در میان روی رأس‌های با شمارهٔ زوج و فرد می‌رود. پس بعد از ۲۰۱۹ حرکت، حتماً روی یک رأس با شمارهٔ زوج قرار می‌گیرد. از بین رأس‌های مشخص شده، فقط Q شمارهٔ زوج دارد.

۲۶. (۳)

$$b = ۲a + ۱,\ c = ۲b + ۱ \Rightarrow c = ۲(۲a + ۱) + ۱ \Rightarrow c = ۴a + ۳$$

از طرفی c عددی سه‌رقمی است، پس:

$$c \leq ۹۹۹ \Rightarrow ۴a + ۳ \leq ۹۹۹ \Rightarrow ۴a \leq ۹۹۶ \Rightarrow a \leq ۲۴۹$$

بنابراین رقم صدگان a برابر ۱ یا ۲ است.

با توجه به رابطهٔ $b = ۲a + ۱$، برای این‌که رقم یکان و صدگان b با هم برابر باشد، لازم است رقم دهگان a از ۴ بزرگ‌تر باشد. (زیرا در غیر این‌صورت وقتی عدد a را دو برابر می‌کنیم، تک‌تک رقم‌هایش دو برابر می‌شود و در نتیجه رقم یکان و صدگانش همچنان با هم برابر می‌مانند و وقتی عدد ۱ را به حاصل اضافه کنیم، دیگر رقم‌های یکان و صدگان شبیه هم نخواهند بود.) پس می‌توانیم دو نتیجهٔ زیر را بگیریم:

- با استدلالی مشابه، رقم دهگان b نیز باید بزرگ‌تر از ۴ باشد.
- رقم یکان و صدگان a نمی‌تواند برابر ۲ باشد، زیرا اگر رقم صدگان a برابر ۲ باشد، a از ۲۵۰ بزرگ‌تر می‌شود که می‌دانیم ممکن نیست.

تا اینجا a می‌تواند برابر یکی از اعداد ۱۵۱، ۱۶۱، ۱۷۱، ۱۸۱ و ۱۹۱ باشد که b متناظر با این اعداد به ترتیب برابر ۳۰۳، ۳۲۳، ۳۴۳، ۳۶۳ و ۳۸۳ باشد. از این بین فقط دو عدد ۳۶۳ و ۳۸۳ برای b قابل قبول هستند. پس a فقط می‌تواند ۲ مقدار داشته باشد.

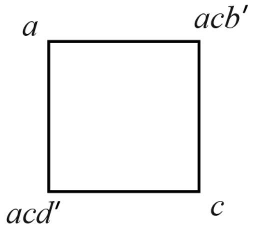
۲۷. (۴) در شکل زیر، منظورمان از علامت $a \to b$ این است که عدد b مضرب عدد a است. با توجه به اطلاعات مسئله:

- باید اعدادی روی رئوس مربع قرار دهیم که به شکل زیر باشند؛ زیرا اگر دو فلش هم‌جهت پشت سر هم قرار بگیرند، از دو عدد روبه‌روی هم، حتماً یکی بر دیگری بخش‌پذیر می‌شود.

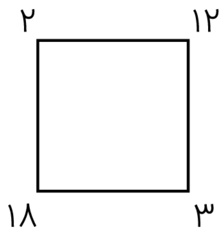
$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ \downarrow & & \uparrow \\ d & \longleftarrow & c \end{array}$$

- هیچ‌یک از اعداد نمی‌تواند برابر ۱ باشد، زیرا در آن‌صورت عدد روبه‌رویی ۱ بر آن بخش‌پذیر خواهد بود.
- a و c باید اعدادی اول باشند، زیرا در غیر این‌صورت می‌توانیم آن‌ها را با یکی از شمارنده‌های اولشان جایگزین کنیم و شرایط مسئله برقرار بماند و مجموع اعداد کمتر بشود.
- a و c دو عدد متمایزند، چون در غیر این‌صورت بر هم بخش‌پذیر خواهند بود.

با توجه به جمله‌های بالا، هر کدام از b و d مضرب اعداد اول متمایز a و c هستند. پس می‌توانیم آن‌ها را به شکل $b = acb'$ و $d = acd'$ بنویسیم که b' و d' دو عدد طبیعی متمایز مخالف ۱ هستند. پس می‌توانیم اعداد روی مربع را به شکل زیر بنویسیم.



حالا به‌جای a و c و b' و d'، کوچک‌ترین اعداد ممکن را جای‌گذاری می‌کنیم. $a = ۲$، $b = ۳$، $b' = ۲$ و $d' = ۳$ کوچک‌ترین حالت ممکن برای این اعداد است. مجموع این اعداد برابر ۳۵ می‌شود و مربع به شکل زیر در می‌آید:

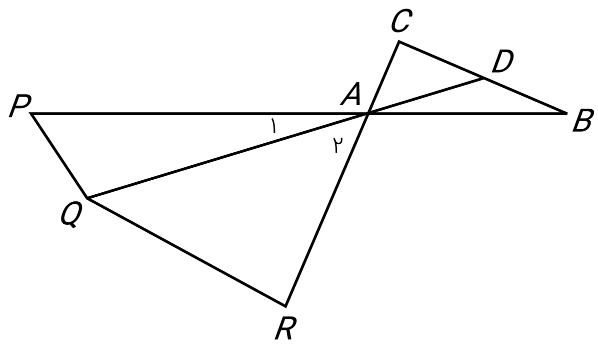


۲۸. (۲) برای این‌که حاصل‌ضرب این اعداد مربع کامل بشود، حتماً باید عدد ۷۰ را حذف کنیم زیرا هیچ عدد دیگری از این مجموعه بر ۷ بخش‌پذیر نیست. حاصل‌ضرب اعداد باقی‌مانده برابر است با:

$$۱۰ \times ۲۰ \times ۳۰ \times ۴۰ \times ۵۰ \times ۶۰ \times ۸۰ \times ۹۰ = ۲^{۱۵} \times ۳^{۴} \times ۵^{۹}$$

این عدد مربع کامل نیست، ولی کافی است عدد ۱۰ را هم از مجموعه حذف کنیم تا توان‌های ۲ و ۵ در این حاصل‌ضرب، زوج شود و حاصل‌ضرب اعداد باقی‌مانده مربع کامل شود.

۲۹. (۱) می‌دانیم مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بینشان، پس:



$$S_{\triangle APR} = \frac{۱}{۲} AP \cdot AR \cdot \sin A = \frac{۱}{۲} \times ۲AB \times ۴AC \cdot \sin A = ۸S_{\triangle ABC},$$

$$S_{\triangle APQ} = \frac{۱}{۲} AP \cdot AQ \cdot \sin A_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۲AB \times ۳AD \cdot \sin A_۱ = ۶S_{\triangle ABD},$$

$$S_{\triangle AQR} = \frac{۱}{۲} AQ \cdot AR \cdot \sin A_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۳AD \times ۴AC \cdot \sin A_۲ = ۱۲S_{\triangle ADC}$$

از طرفی هر میانه، مساحت مثلث را نصف می‌کند. پس داریم: $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = \frac{۱}{۲} S_{\triangle ABC}$. در نتیجه:

$$S_{\triangle APQ} = ۶ \times \frac{۱}{۲} S_{\triangle ABC} = ۳S_{\triangle ABC}\ , \quad S_{\triangle AQR} = ۱۲ \times \frac{۱}{۲} S_{\triangle ABC} = ۶S_{\triangle ABC}$$

بنابراین داریم:

$$S_{\triangle PQR} = S_{\triangle APQ} + S_{\triangle AQR} - S_{\triangle APR} = ۳S_{\triangle ABC} + ۶S_{\triangle ABC} - ۸S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABC}$$

۳۰. (۳) اگر این عدد چهاررقمی را با $\overline{abcd}$ نمایش دهیم، داریم:

- $\overline{abcd}$ باید بر $\overline{abc}$ بخش‌پذیر باشد، داریم: $\overline{abcd} = ۱۰ \times \overline{abc} + d$. ولی $۱۰ \times \overline{abc}$ بر $\overline{abc}$ بخش‌پذیر است. پس لازم است d هم بر $\overline{abc}$ بخش‌پذیر باشد. ولی d عددی یک‌رقمی است و $\overline{abc}$ عددی سه‌رقمی. و تنها حالتی که ممکن است عددی بر عددی بزرگ‌تر از خودش بخش‌پذیر باشد این است که $d = ۰$.
- $\overline{abc۰}$ باید بر $\overline{ab۰}$ بخش‌پذیر باشد، یعنی لازم است $\overline{abc}$ بر $\overline{ab}$ بخش‌پذیر باشد. داریم: $\overline{abc} = ۱۰ \times \overline{ab} + c$. با استدلالی مشابه حالت قبل، داریم $c = ۰$.
- $\overline{ab۰۰}$ باید بر $\overline{a۰۰}$ بخش‌پذیر باشد، یعنی لازم است $۱۰۰ \times \overline{ab}$ بر $۱۰۰a$ بخش‌پذیر باشد. در نتیجه لازم است $\overline{ab}$ بر a بخش‌پذیر باشد. از طرفی $\overline{ab} = ۱۰a + b$. و $۱۰a$ بر a بخش‌پذیر است. پس لازم است b هم بر a بخش‌پذیر باشد.
- $\overline{ab۰۰}$ باید بر $\overline{b۰۰}$ بخش‌پذیر باشد، یعنی لازم است $۱۰۰ \times \overline{ab}$ بر $۱۰۰b$ بخش‌پذیر باشد. در نتیجه لازم است $\overline{ab}$ بر b بخش‌پذیر باشد. از طرفی $\overline{ab} = ۱۰a + b$. پس لازم است $۱۰a$ هم بر b بخش‌پذیر باشد.

بنابراین دنبال اعداد یک‌رقمی a و b می‌گردیم که هم b بر a و هم $۱۰a$ بر b بخش‌پذیر باشد. داریم:

$$a = ۱ \Rightarrow b \in \{۱, ۲, ۵\}$$

$$a = ۲ \Rightarrow b \in \{۲, ۴\}$$

$$a = ۳ \Rightarrow b \in \{۳, ۶\}$$

$$a = ۴ \Rightarrow b \in \{۴, ۸\}$$

$$a = ۵ \Rightarrow b = ۵$$

$$a = ۶ \Rightarrow b = ۶$$

$$a = ۷ \Rightarrow b = ۷$$

$$a = ۸ \Rightarrow b = ۸$$

$$a = ۹ \Rightarrow b = ۹$$

پس اعداد زیر، خاصیت خواسته شده در سؤال را دارند:

۱۱۰۰، ۱۲۰۰، ۱۵۰۰، ۲۲۰۰، ۲۴۰۰، ۳۳۰۰، ۳۶۰۰، ۴۴۰۰، ۴۸۰۰، ۵۵۰۰، ۶۶۰۰، ۷۷۰۰، ۸۸۰۰ و ۹۹۰۰.