

راه حل مسئله‌های ریاضیات کانگورو ۱۳۹۸

پایه‌های هفتم و هشتم

پاسخ مسئله‌های سه امتیازی

۱. (۵)

۲. (۵)

$$10 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$$

۳. (۳) از هر وجه مکعب بزرگ، یک مکعب کوچک برداشته شده و یک مکعب کوچک هم از وسط مکعب بزرگ کم شده است. پس در کل ۷ مکعب کوچک برداشته شده است. بنابراین 20° مکعب باقی مانده است.

۴. (۴) فقط در این گزینه است که حلقه سفید به دو حلقه دیگر متصل است و دو حلقه دیگر به هم متصل نیستند.

۵. (۴) در گزینه (۱) می‌توانیم از یکی از رأس‌های مربع شروع کنیم، روی محیط مربع حرکت کنیم و به نقطه ابتدایی برگردیم و بعد بدون برداشتن مداد از روی کاغذ، روی محیط دایره حرکت کنیم و دوباره به نقطه شروع برسیم.

در گزینه (۲) می‌توانیم از یکی از رأس‌های مربع شروع کنیم، روی محیط مربع حرکت کنیم و به نقطه ابتدایی برگردیم.

در گزینه (۳) می‌توانیم از یکی از دو سر قطر رسم شده در مربع شروع کنیم، روی محیط مربع حرکت کنیم و به نقطه ابتدایی برگردیم، سپس بدون برداشتن مداد از روی کاغذ، از روی قطر حرکت کنیم و به سر دیگر قطر برسیم.

در گزینه (۵) می‌توانیم از یکی از دو رأس بالایی مربع حرکت را شروع کنیم و روی محیط مربع حرکت کنیم و به نقطه ابتدایی برگردیم، سپس بدون برداشتن مداد از روی کاغذ، روی دو خط مورب داخل مربع حرکت کنیم.

۶. (۴) هر کس به ۴ نفر کیک داده است، پس در کل 20° کیک خورده شده است. یعنی در ابتدا روی هم 40° کیک داشته‌اند.

۷. (۱) لاله قبل از مریم، نرگس قبل از لادن، مریم قبل از نرگس، و نیلوفر قبل از لادن به خط پایان رسیده است. پس هیچ‌یک از لاله، نرگس، مریم و نیلوفر آخر نشده‌اند.
۸. (۲) در شماره صفحه‌های این کتاب پنج تا صفر آمده، پس تعداد صفحه‌ها از ۴۹ بیشتر و از ۶۰ کمتر است. گزینه (۲) تنها گزینه با این شرایط است. اگر کتاب ۵۸ صفحه داشته باشد، در رقم‌های شماره صفحه‌های کتاب، دقیقاً شش تا ۸ آمده است.
۹. (۴) اگر تمام مساحت مربع بزرگ را به مربع‌های کوچک‌تر تقسیم می‌کردیم، در کل ۳۶ مربع می‌شد و از بین این ۳۶ مربع، $۷ + ۹ = ۱۶$ مربع رنگ شده بود و $\frac{۱۶}{۳۶} = \frac{۴}{۹}$.
۱۰. (۱) اگر احمد در هر سبد a سیب بگذارد، محمود در هر سبد $a + ۲$ سیب می‌گذارد. پس داریم:
- $$۵(a + ۲) = ۶a \Rightarrow ۵a + ۱۰ = ۶a \Rightarrow a = ۱۰$$

پاسخ مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (۱) اگر رقم‌های پوشانده شده را با x, y, z و z نمایش بدهیم، داریم:

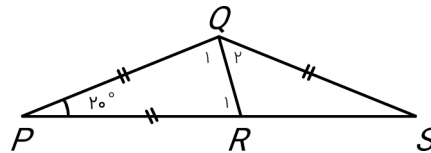
$$\begin{array}{r} ۱۲۴۳ \\ + xy۲۶ \\ + ۲۱z۷ \\ \hline ۱۰۱۲۶ \end{array}$$

می‌توانیم رقم‌های صدگان و هزارگان دو عدد پایینی را با هم جابه‌جا کنیم و همچنان حاصل جمع تغییری نمی‌کند. یعنی:

$$\begin{array}{r} ۱۲۴۳ \\ + ۲۱۲۶ \\ + xyz۷ \\ \hline ۱۰۱۲۶ \end{array}$$

$$۳۳۶۹ = ۱۲۴۳ + ۲۱۲۶ = ۶۷۵۷ - ۳۳۶۹ = ۱۰۱۲۶ = xyz۷.$$

۱۲. (۲) در هر مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های مجاور قاعده با هم برابرند. پس در مثلث PQS داریم $\hat{S} = ۲۰^\circ$ و در مثلث PQR داریم:
- $$\hat{Q}_1 = \hat{R}_1$$



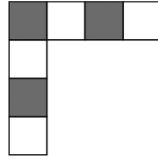
همچنین در هر مثلث، مجموع زاویه‌های داخلی برابر ۱۸۰ درجه است. پس در مثلث PQR داریم:

$$۲۰ + \hat{Q}_1 + \hat{R}_1 = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{Q}_1 + \hat{R}_1 = ۱۸۰ - ۲۰ = ۱۶۰, \hat{Q}_1 = \hat{R}_1 \Rightarrow ۲\hat{Q}_1 = ۱۶۰ \Rightarrow \hat{Q}_1 = ۸۰^\circ$$

پس در مثلث PQS داریم:

$$\hat{Q}_2 + ۸۰ + ۲۰ + ۲۰ = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{Q}_2 = ۶۰^\circ$$

۱۳. (۵) قطعه زیر فقط می‌تواند در گوشه‌های این شکل قرار بگیرد و در شکل گزینه (۵)، در هیچ‌یک از گوشه‌ها، این قطعه دیده نمی‌شود.



۱۴. (۲) دارا با هر چهار نفر دست داده است، پس هرمز با دارا دست داده، و اردشیر فقط با دارا دست داده است. جمشید با سه نفر دست داده و اردشیر جزو این سه نفر نبوده است، چون اردشیر فقط با دارا دست داده. پس جمشید با بهرام و هرمز هم دست داده است. از طرفی هرمز با بهرام دست نداده است، چون بهرام فقط با دارا و جمشید دست داده است. بنابراین هرمز فقط با دارا و جمشید دست داده است.

۱۵. (۳) می‌دانیم: $\frac{۱۱}{۱۰۰} = \frac{۵۵}{۱۰۰۰}$ ، پس از ۲۰ پرتاب اول ۱۱ تا گل شده است. همچنین $\frac{۱۴}{۱۰۰} = \frac{۵۶}{۱۰۰۰}$ ، پس از ۲۵ پرتاب اول ۱۴ تا گل شده است. پس، از ۵ پرتاب آخر $۱۴ - ۱۱ = ۳$ تا گل شده است.

۱۶. (۳) بعد از برش‌ها، تکه‌های مربوط به گوشه بالا سمت چپ و گوشه پایین سمت راست، به شکل مربع هستند. در گوشه بالا سمت چپ، ۱ مربع و در گوشه پایین سمت راست، ۴ مربع ساخته می‌شود.

۱۷. (۴)

• $\frac{۱}{۸}$ حیوانات سگ هستند، یعنی $\frac{۲۴}{۸} = ۳$ سگ در مزرعه هست.

• $\frac{۲}{۴}$ حیوانات گاو نیستند، پس $\frac{۱}{۴}$ آن‌ها گاوند، یعنی $\frac{۲۴}{۴} = ۶$ گاو در مزرعه هست.

• $\frac{۲}{۳}$ حیوانات گربه نیستند، پس $\frac{۱}{۳}$ آن‌ها گربه‌اند، یعنی $\frac{۲۴}{۳} = ۸$ گربه در مزرعه هست.

پس تعداد کانگوروها برابر است با: $۷ = ۳ - ۶ - ۸ - ۲۴$.

۱۸. (۲) عرض هر مستطیل برابر است با: $۱٫۵ \text{ cm} = \frac{۶}{۴}$ و طول هر مستطیل برابر است با: $۲ \text{ cm} = \frac{۱۰}{۵}$. پس مجموع مساحت همه مستطیل‌ها

برابر است با: $۴۲ \text{ cm}^2 = ۱۴ \times ۲ \times ۱٫۵$. مساحت مثلث سفید هم برابر است با: $۳۰ \text{ cm}^2 = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۰$. بنابراین مساحت قسمت

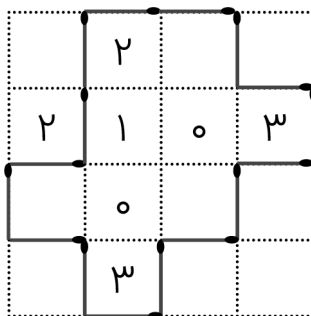
سایه‌خورده برابر است با: $۱۲ \text{ cm}^2 = ۴۲ - ۳۰$.

۱۹. (۳) اگر طول شمع اول و دوم را به ترتیب با x و y نمایش دهیم، بعد از سه ساعت، طول این دو شمع برابر است با: $\frac{۳}{۶}x$ و $\frac{۵}{۸}y$. پس:

$$\frac{۳}{۶}x = \frac{۵}{۸}y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\frac{۵}{۸}}{\frac{۳}{۶}} = \frac{۵}{۴}$$

۲۰. (۳) برای این‌که دور خانه‌های عدددار، به اندازه تعداد مشخص شده کبریت باشد و کمترین تعداد ممکن کبریت استفاده شود، لازم است

کبریت‌ها به شکل زیر در جدول قرار بگیرند:

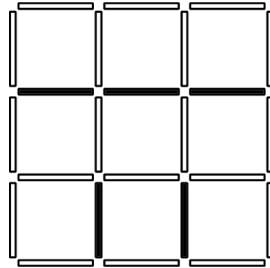


پاسخ مسئله‌های پنج امتیازی

۲۱. (۲) دو طرف یکی از قطرها، دو عدد ۷ و ۲۳ نوشته شده است. پس سمت راست این قطر عددهای ۸، ۹، ۱۰، ... و ۲۲ نوشته شده است. تعداد این عددها برابر است با: $22 - 7 = 15$. سمت چپ قطر هم همین تعداد عدد نوشته شده است. دو عدد هم که دو سر قطر قرار دارد. پس در کل، $15 + 15 + 2 = 32$ عدد روی دایره نوشته شده است.

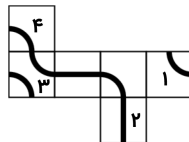
۲۲. (۲) لیلا بعد از فروش ۴۰ بطری، ۶۰ سکه به دست آورده است، پس او هر بطری را به قیمت $\frac{60}{40} = 1.5$ سکه فروخته است. بنابراین، لیلا پس از فروش تمام بطری‌ها $75 = 1.5 \times 50$ سکه خواهد داشت.

۲۳. (۳) برای این که تعداد چوب سبزی کمتری مصرف شود، بهتر است چوب‌های سبز را طوری بگذاریم که در ضلع مشترک دو مربع کنار هم باشند. با این کار، هر چوب‌کبریت سبز، ضلع سبز دو مربع را تأمین می‌کند. پس با ۸ چوب‌کبریت سبز می‌توانیم حداکثر برای ۸ مربع، ضلع سبز فراهم کنیم. پس برای جدولی با ۹ مربع، دست‌کم به ۵ چوب‌کبریت سبز نیاز داریم. شکل زیر یک نوع چیدن ۵ چوب‌کبریت سبز را نشان می‌دهد:



۲۴. (۵) در شکل گزینه (۵)، بعد از ساختن مکعب، وجه ۱ کنار وجه ۳ قرار می‌گیرد و مسیر مورچه بین این دو وجه درست می‌شود. همچنین وجه ۱ کنار وجه ۴ خواهد بود و مسیر مورچه از وجه ۴ به وجه ۱ ادامه پیدا می‌کند. وجه ۴ و وجه ۲ هم کنار هم قرار می‌گیرند تا قسمت دیگری از مسیر مورچه درست بشود.

می‌توان دید که در سایر گزینه‌ها بعد از کنار هم قرار گرفتن وجه‌ها و درست شدن مکعب، مسیر مورچه درست نمی‌شود و خم‌ها در امتداد هم قرار نمی‌گیرند.



۲۵. (۵) الهام در آخر روز شنبه، $54 = 60 \times \frac{9}{10}$ تا از شکلات‌هایش باقی‌مانده بود. در آخر روز یکشنبه، $48 = 60 \times \frac{9}{10} \times \frac{8}{9}$ تا از شکلات‌هایش باقی‌مانده بود. در آخر روز دوشنبه، $42 = 60 \times \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8}$ تا از شکلات‌هایش باقی‌مانده بود و به همین ترتیب روزی که $6 = 60 \times \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ شکلات‌های باقی‌مانده را خورد.

۲۶. (۱) رنگ دایره‌های ۲ و ۵ و ۶ دایره‌ها با هم متفاوت است، چون همگی به هم وصل‌اند. همچنین رنگ دایره‌های ۲ و ۸ و ۶ هم دایره‌ها با هم متفاوت است. پرهام این دایره‌ها را به سه رنگ، رنگ کرده است. پس حتماً باید دایره‌های ۵ و ۸ هم رنگ باشند.

۲۷. (۳) اگر پس‌انداز فرید را با x نمایش بدهیم، پس‌انداز رضا پیش از خرید تبلت، $\frac{5}{3}x$ بوده است. بعد از خرید تبلت، پس‌انداز رضا $\frac{5}{4}x - 16^\circ$ می‌شود. پس رابطه زیر برقرار است:

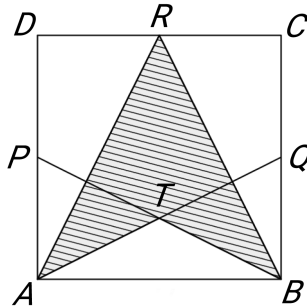
$$\begin{aligned} \frac{\frac{5}{4}x - 16^\circ}{x} = \frac{3}{5} &\Rightarrow 3x = 5 \left(\frac{5}{4}x - 16^\circ \right) \Rightarrow 3x = \frac{25}{4}x - 80^\circ \Rightarrow 80^\circ = \frac{25}{4}x - 3x \\ &\Rightarrow x \left(\frac{25}{4} - 3 \right) = 80^\circ \Rightarrow \frac{16}{4}x = 80^\circ \Rightarrow x = \frac{80^\circ}{4} = 20^\circ \end{aligned}$$

پس رضا قبل از خرید تبلت، $20^\circ \times \frac{5}{3} = 33\frac{1}{3}^\circ$ سکه داشت.

۲۸. (۵) هر بازیکن، با تمام بازیکنان تیم‌های دیگر بازی می‌کند. یعنی اگر n تیم در تورنمنت شرکت کرده باشند، هر بازیکن باید $3(n-1)$ بازی انجام بدهد. $3n$ نفر در تورنمنت حضور دارند، بنابراین اگر تعداد بازی‌های تمام بازیکن‌ها را با هم جمع کنیم، حاصل برابر $9n(n-1) = 3n \times 3(n-1)$ می‌شود. این عدد، دو برابر تعداد بازی‌هاست، چون هر بازی را در بازی‌های انجام شده توسط هر کدام از دو بازیکن شمرده‌ایم. پس تعداد بازی‌ها برابر است با $\frac{9n(n-1)}{2}$.

اگر $n = 7$ ، $\frac{9 \times 7 \times 6}{2} = 189$ مسابقه برگزار می‌شود. اگر $n = 8$ ، $\frac{9 \times 8 \times 7}{2} = 252$ مسابقه برگزار می‌شود. پس اگر $n \geq 8$ ، بیش از 250 مسابقه باید برگزار شود که امکان ندارد. پس حداکثر ۷ تیم در این تورنمنت حضور دارند.

۲۹. (۵) مساحت مربع را با S مشخص می‌کنیم. در شکل زیر، مساحت مثلث ABR نصف مساحت مربع است، زیرا ارتفاع و قاعده‌اش برابر طول ضلع مربع است و مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع.



از طرفی دو مثلث AQB و APB با هم هم‌نهشت‌اند. پس $\angle QAB = \angle PBA$. بنابراین مثلث ABT متساوی‌الساقین است و داریم $TA = TB$.

همچنین داریم $\angle TBQ = 90^\circ - \angle PBA$ و $\angle TQB = 90^\circ - \angle QAB$ ، پس در مثلث TQB داریم: $\angle TQB = \angle TBQ$. بنابراین مثلث TQB هم متساوی‌الساقین است و داریم $TQ = TB$. در نتیجه $TQ = TA$. بنابراین BT میانه مثلث ABQ است و می‌دانیم میانه هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند. پس مساحت مثلث ABT نصف مساحت مثلث ABQ است. از طرفی مساحت مثلث ABQ هم $\frac{1}{4}$ مساحت مربع است. پس:

$$S_{\triangle ABT} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} S = \frac{1}{16} S$$

در نتیجه مساحت قسمت سایه خورده برابر است با:

$$S_{\triangle ABR} - S_{\triangle ABT} = \frac{1}{4} S - \frac{1}{16} S = \frac{3}{16} S$$

۳۰. (۴) در ۵ واگن ابتدا و ۵ واگن انتهای قطار، روی هم $398 = 2 \times 199$ مسافر حضور دارند. پس در ۸ واگن وسط قطار جمعاً $700 - 398 = 302$ مسافر حضور دارند.

از اینجا به بعد مسئله را به ۸ واگن وسطی محدود می‌کنیم. از این ۳۰۲ نفر، ۱۹۹ نفرشان در ۵ واگن ابتدایی (از این ۸ واگن) هستند. پس $302 - 199 = 103$ نفر در ۳ واگن انتهایی (از این ۸ واگن) هستند. با استدلالی مشابه می‌توان دید ۱۰۳ نفر هم در ۳ واگن ابتدایی (از این ۸ واگن) هستند. بنابراین در دو واگن وسطی، $302 - 2 \times 103 = 96$ مسافر حضور دارند.

