



دوازدهمین دوره جشنواره بین المللی

ریاضیات کانگورو

12th

International Math Kangaroo 2020



پاسخنامه‌ی پایه‌های ۱۱ و ۱۲



.۱ (۴)

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 10 \times 3 \times 4 \times 4 \times 3 \times 2 = 10 \times 12 \times 24$$

رقم آخر این حاصلضرب برابر صفر و رقم یکی مانده به آخر آن برابر $2 \times 4 = 8$ خواهد بود.

۲. (۲) طول مسیر افقی ای که مورچه طی می کند، همان ۵ متر است. به این مسیر ۲ متر در جهت عمودی و روبه بالا، و ۲ متر در جهت عمودی و رو به پایین اضافه می شود. طول مسیر جدید مورچه برابر است با: $9 = 2 + 2 + 5$ متر.

۳. (۲) a و b هر دو اعدادی مثبت و کوچکتر از ۱ هستند. پس اگر درهم ضرب شوند، حاصلضربشان از تک تکشان کوچکتر خواهد بود.

۴. (۱) در نمودار دایره ای، دو عدد تقریباً برابر می بینیم: 11% و 12% . پس این دو عدد مربوط به دانش آموزانی است که پیاده یا با تاکسی به مدرسه می روند. از بین اعداد باقی مانده، 47% تقریباً دوبرابر 24% است، پس این دو عدد هم مربوط به دانش آموزانی است که با اتوبوس یا دوچرخه به مدرسه می روند. تنها عدد باقی مانده، 6% است. این عدد مربوط به دانش آموزانی است که به روش دیگری به مدرسه می روند.

۵. (۳) در جمع ستونی زیر، اگر در یک ستون جای ارقام را با هم جابه جا کنیم، همچنان حاصلجمع ثابت می ماند. پس در هر ستون، ارقام را طوری جابه جا می کنیم که رقم های هریک از ۵ عدد سه رقمی یکسان شوند. داریم:

$$\begin{array}{r} \text{AAA} \\ \text{BBB} \\ \text{CCC} \\ + \text{DDD} \\ \text{EEE} \\ \hline 2664 \end{array}$$

از طرفی عدد سه رقمی AAA برابر است با $A \times 111$. در نتیجه

$$111A + 111B + 111C + 111D + 111E = 111(A + B + C + D + E) = 2664$$

$$\Rightarrow A + B + C + D + E = \frac{2664}{111} = 24$$



۶. (۵)

$$\frac{1010^2 + 2020^2 + 3030^2}{2020} = \frac{1010^2(1+2^2+3^2)}{1010 \times 2} = \frac{1010 \times 14}{2} = 7070$$

۷. (۴) عدد b نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۱۰۰۰ باشد، چرا که اگر داشته باشیم $b > 1000$ آنگاه حتماً c هم از ۱۰۰۰ بزرگ‌تر است. پس خواهیم داشت: $a \geq 1$ ، $\bar{b} > 1000$ و $c > 1000$. در نتیجه حاصل abc بزرگ‌تر از $1000000 = 1000 \times 1000 \times 1000$ خواهد شد که ممکن نیست.

از طرفی b می‌تواند برابر با ۱۰۰۰ باشد. برای این منظور، کافی است داشته باشیم $a = 1$ و $b = c = 1000$. پس بیشترین مقدار ممکن برای b برابر ۱۰۰۰ است.

۸. (۴) وزن هر سگ برابر است با $\frac{K}{D}$. پس وزن M سگ برابر است با $\frac{MK}{D}$. در نتیجه وزن E فیل برابر است با $\frac{MK}{D}$. پس وزن هر فیل برابر است با

$$\frac{\frac{MK}{D}}{E} = \frac{MK}{ED}$$

۹. (۵) رنگ وجه دو تاس مستقل از یکدیگر است. پس احتمال قرمز آمدن هر دو تاس برابر است با $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. به‌طور مشابه احتمال آبی یا سفید آمدن هر دو تاس هم به همین شکل محاسبه می‌شود. پس احتمال هم‌رنگ بودن دو تاس برابر است با

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

۱۰. (۴) $6n$ حتماً بر ۳ بخش‌پذیر است. اگر یک واحد از آن کم کنیم، دیگر بر ۳ بخش‌پذیر نخواهد بود. اما گزینه‌های دیگر به ازای بعضی اعداد صحیح، بر ۶ بخش‌پذیر خواهند بود.

$$(1) n = 1 \Rightarrow 5n + 1 = 6 \quad (2) n = 6 \Rightarrow n^2 = 36 \quad (3) n = 2 \Rightarrow n(n+1) = 6$$

$$(5) n = 2 \Rightarrow n^3 - 2 = 6$$



۱۱. (۵) مساحت ناحیه مشترک را با X نمایش می‌دهیم. در هریک از حالت‌های ۱ تا ۴ داریم:

$$B - R = B + X - R - X = (B + X) - (R + X)$$

که مقدار آن برابر است با اختلاف مساحت دو مستطیل که این مقدار در هریک از حالت‌ها عددی ثابت است.

۱۲. (۲) با کمتر از ۳ مرحله امکان ندارد همه سکه‌ها خط بشوند. چرا که با ۲ مرحله، ۶ بار وضعیت سکه‌ها را تغییر داده‌ایم. در این حالت دست کم یک سکه وجود دارد که دوبار جهتش برعکس شده است. بعد از دو مرحله روی شیر این سکه بالا خواهد بود. پس با دو مرحله نمی‌توانیم وضعیت همه سکه‌ها را به حالت خط در بیاوریم. ولی با ۳ مرحله می‌توانیم روی همه سکه‌ها را به حالت خط در بیاوریم (سکه‌های پشت‌ورو شده در هر مرحله با خطی در زیر حرف مربوطه مشخص شده‌اند):

ش	ش	ش	ش	ش
ش	ش	خ	خ	خ
ش	خ	ش	ش	خ
خ	خ	خ	خ	خ

۱۳. (۲) هریک از جعبه‌ها ۳ نوع وجه غیرهم‌نهشت دارند. در شکل صورت سؤال از هریک از این نوع وجه‌ها، دوتا به هم چسبیده است و رنگ نمی‌شود. پس در کل به اندازه مساحت یک جعبه از چهار جعبه موجود، رنگ نخواهد شد. پس ۳ قوطی رنگ لازم داریم.

۱۴. (۲) اگر بخواهیم تساوی $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 1$ برقرار باشد، با توجه به صحیح بودن a ، b و c لازم است دوتا از پرانتزها برابر صفر و دیگری برابر ۱ یا -۱ باشد. بدون کم‌شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد:

$$a - b = 0, \quad b - c = 0$$

در نتیجه $a = b, b = c \Rightarrow a = c \Rightarrow c - a = 0$ که امکان ندارد. برای بقیه گزینه‌ها کافی است قرار دهیم:

$$(۱) a = b = c \quad (۳) a = 2, b = c = 1 \quad (۴) a = 2, b = 0, c = 1 \quad (۵) b = 3, a = c = 1$$



۱۵. (۲) این عدد صدرقمی را با X نشان می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} 2,9 \times 10^{99} \leq x < 3 \times 10^{99} &\Rightarrow (2,9 \times 10^{99})^2 \leq x^2 < (3 \times 10^{99})^2 \\ &\Rightarrow 8,41 \times 10^{198} \leq x^2 < 9 \times 10^{198} \end{aligned}$$

و می‌دانیم هر دو عدد 9×10^{198} و $8,41 \times 10^{198}$ اعدادی ۱۹۹ رقمی هستند. پس X^2 هم ۱۹۹ رقمی است.

۱۶. (۱) از خانه‌ای که روی آن عدد 10^0 نوشته شده، عدد داخل خانه‌ها را به ترتیب در جهت ساعتگرد با a_1, a_2, \dots, a_{14} نمایش می‌دهیم. داریم

$$10^0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{14} = a_1 + a_2 + \dots + a_{14} + a_{15} \Rightarrow 10^0 = a_{15}$$

همچنین

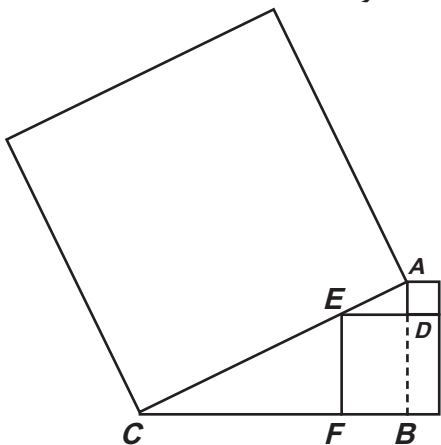
$$a_{15} + a_{16} + \dots + a_{28} = a_{16} + a_{17} + \dots + a_{28} + a_{29} \Rightarrow a_{15} = a_{29} = 10^0$$

به طور مشابه می‌توانیم ثابت کنیم عدد داخل هر خانه با عدد خانه هفتم بعد از خودش برابر است. یعنی

$$10^0 = a_{15} = a_{29} = a_{43} = a_{57} = a_{71} = a_{85} = a_{99} = a_{113} = a_{127} = a_{141} = a_{155} = a_{169} = a_{183} = a_{197}$$

پس حاصلجمع هر ۱۵ عدد برابر است با $15 \times 10^0 = 15$.

۱۷. (۲) در شکل زیر، طول ضلع مربع‌های کوچک و متوسط به ترتیب برابر است با ۱ و ۳.



پس می‌دانیم $AB=4$ و $FB=2$.

همچنین داریم $DE=2$ و می‌دانیم دو مثلث ADE و EFC به حالت سه زاویه باهم متشابه‌اند.



$$\frac{AD}{EF} = \frac{DE}{CF} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{CF} \Rightarrow CF = 6$$

پس

$$BC = CF + FB = 6 + 2 = 8 \text{ داریم}$$

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ABC ، داریم

$$BC^2 + AB^2 = AC^2 \Rightarrow AC^2 = 64 + 16 = 80$$

بنابراین مساحت مربع بزرگ برابر 8^2 خواهد بود.

۱۸. (۱) چند جمله اول این دنباله به این شکل هستند:

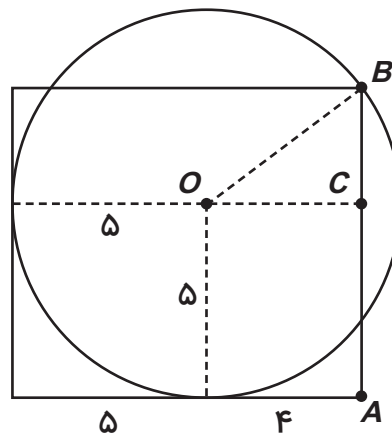
$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots$$

به راحتی دیده می‌شود از هر سه جمله پشت سرهم دقیقاً یکی از جمله‌ها (جمله‌ای که شماره‌اش مضرب ۳ است) عددی زوج است. پس کافی است بین اعداد ۱ تا 2020 ، چندتا از آن‌ها مضرب ۳ هستند. داریم

$$2020 = 3 \times 673 + 1$$

پس ۶۷۳ جمله از بین 2020 جمله اول دنباله $\{f_n\}$ زوج هستند.

۱۹. (۳) در شکل زیر، شعاع دایره برابر ۵ است. در مثلث OBC داریم



$$OB = 5, OC = 4$$

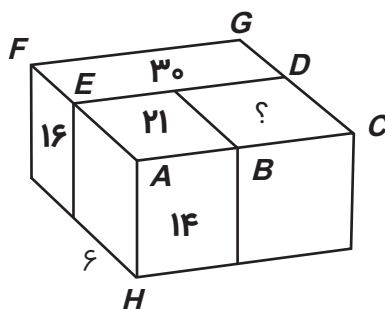


پس بنابر قضیه فیثاغورس داریم

$$CB^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow CB = 3$$

در نتیجه طول BA برابر است با $8 = 5 + 3$. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با $8 \times 9 = 72$.

۲۰. (۲) نقاط روی شکل را مانند زیر نام گذاری می کنیم.



داریم

$$AB \cdot AE = 21, AE = 6 \Rightarrow AB = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$AB \cdot AH = 14 \Rightarrow \frac{7}{2} AH = 14 \Rightarrow AH = 4$$

$$FE \cdot AH = 16 \Rightarrow 4FE = 16 \Rightarrow FE = 4$$

$$FE \cdot ED = 30 \Rightarrow 4ED = 30 \Rightarrow ED = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow AB + BC = \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{7}{2} + BC = \frac{15}{2} \Rightarrow BC = \frac{8}{2} = 4$$

مساحت خواسته شده برابر است با $BC \cdot CD$ ، از طرفی داریم $CD = AE = 6$. پس مساحت خواسته شده برابر است

با:

$$6 \times 4 = 24$$



۲۱. (۴) محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها نقطه $(c, 0)$ است. در نتیجه c عددی منفی است. همچنین سهمی رو به بالاست، پس a عددی مثبت است. برای پیدا کردن علامت b به این نکته توجه کنید که مؤلفه اول مختصات رأس سهمی برابر است با $-\frac{b}{2a}$ که با توجه به شکل، عددی مثبت است.

پس داریم
$$\frac{-b}{2a} > 0, a > 0 \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow b < 0$$

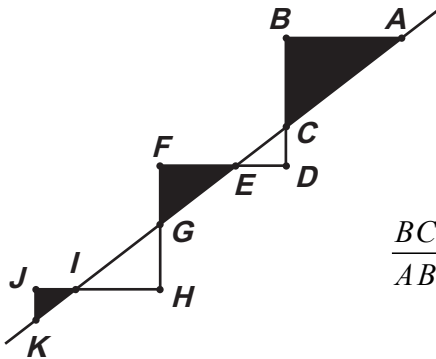
چون b و c اعدادی منفی هستند، حاصلضربشان عددی مثبت خواهد بود.

۲۲. (۵) به راحتی می‌توان دید شیب این خط برابر است با $\frac{3}{4}$.

پس نسبت طول ضلع عمودی هر یک از سه مثلث سیاه

به طول ضلع افقی‌شان برابر $\frac{3}{4}$ است.

داریم



$$\frac{BC}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = 1 \Rightarrow BC = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow CD = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{DE} = \frac{3}{4} \Rightarrow DE = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow EF = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{FG}{EF} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{FG}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow FG = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow GH = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{GH}{HI} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{HI} = \frac{3}{4} \Rightarrow HI = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$



نسبت مساحت مثلث‌های سیاه برابر است با مجذور نسبت تشابه‌هایشان و نسبت تشابه‌هایشان برابر است با

$$IJ : FE : AB \Rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1$$

اگر نسبت‌ها را در ۳ ضرب کنیم، خواهیم داشت: نسبت تشابه ۳ مثلث به هم برابر است با ۱:۲:۳. پس نسبت مساحت‌ها برابر است با ۱:۴:۹.

۲۳. (۴) مساحت مستطیل اولیه را با S نمایش می‌دهیم. مساحت مستطیل جدید برابر است با

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times S = \frac{1}{10} S$$

و مساحت قسمت سایه خورده برابر است با نصف مساحت مستطیل جدید منهای نصف مساحت مستطیل اولیه.

یعنی

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{10} S - \frac{1}{2} S = \frac{1}{20} S - \frac{1}{2} S = \frac{1}{20} S - \frac{10}{20} S = -\frac{9}{20} S$$

پس داریم

$$-\frac{9}{20} S = -30 \Rightarrow S = \frac{30 \times 20}{9} = 75 \text{ m}^2$$

۲۴. (۴) گزینه (۱) اشتباه است چرا که اگر عددی بر ۲ و ۳ بخش پذیر نباشد، آنگاه بر ۶ هم بخش پذیر نیست.

گزینه (۲) اشتباه است چرا که اگر عددی بر ۴ بخش پذیر نباشد، آنگاه بر ۸ هم بخش پذیر نیست.

گزینه (۳) اشتباه است چرا که اگر عددی بر ۶ بخش پذیر نباشد، آنگاه حتماً بر یکی از اعداد ۲ و ۳ هم بخش پذیر نیست.

گزینه (۵) اشتباه است چرا که اگر عددی بر ۱۰ بخش پذیر نباشد، آنگاه حتماً بر یکی از اعداد ۲ و ۵ هم بخش پذیر نیست.

گزینه (۴) ممکن است اتفاق بیفتد. مثلاً $N = 4 \times 5 \times 9 \times 11$ بر همه اعداد بین ۲ تا ۱۱ به جز ۷ و ۸ بخش پذیر است.



۲۵. (۵) با توجه به اطلاعات مسئله داریم

$$\binom{16}{2} = \binom{x}{3} \Rightarrow \frac{16 \times 15}{2 \times 1} = \frac{x(x-1)(x-2)}{3 \times 2 \times 1}$$

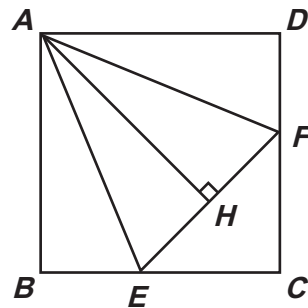
$$\Rightarrow x(x-1)(x-2) = 3 \times 16 \times 15 = 3^2 \times 2^4 \times 5 = 8 \times 9 \times 10 \Rightarrow x = 10$$

پس از صبح تا عصر، ۶ طعم بستنی تمام شده است.

۲۶. (۳) با هربار اضافه یا کم کردن تیلها، باقی‌ماندهٔ تعداد تیلها بر ۶ ثابت می‌ماند زیرا مقدار زیاد یا کم کردن تیلها مضرب ۶ است. پس در هر لحظه باقی‌ماندهٔ تعداد تیلها بر ۶ برابر ۵ است ($71 = 11 \times 6 + 5$). بنابراین امکان ندارد تعداد تیلها کمتر از ۵ تا بشود. از طرفی اگر ابتدا ۳ بار به تیلها اضافه کنیم و بعد ۴ بار از تیلها برداریم، در نهایت ۵ تیله خواهیم داشت:

$$71 + 3 \times 18 - 4 \times 30 = 71 + 54 - 120 = 5$$

۲۷. (۱) در شکل زیر، مثلث‌های ADF ، AHF ، AHE و ABE باهم هم‌نهشت‌اند.



پس اگر طول DF را برابر x در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$EC = FC = 1 - x, FH = EH = x \Rightarrow FE = 2x$$



بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه EFC بنابر قضیه فیثاغورس داریم

$$\begin{aligned}(1-x)^2 + (1-x)^2 &= (2x)^2 \\ \Rightarrow 2(1-x)^2 &= 4x^2 \Rightarrow (1-x)^2 = 2x^2 \\ \Rightarrow 1 + x^2 - 2x &= 2x^2 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \\ \Rightarrow x &= -1 \pm \sqrt{2} \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} x = -1 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

مساحت چهارضلعی $AFCE$ برابر است با مساحت مربع $ABCD$ منهای دو برابر مساحت مثلث ADF که برابر است با

$$1 - 2 \times \frac{1}{4} \times 1 \times (\sqrt{2} - 1) = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

۲۸. (۱) بخش قابل مشاهده این کوه یخ، یک هرم است که قاعده آن مثلثی قائم‌الزاویه با اضلاع قائمه ۲۴ و ۲۵ متر است و ارتفاعش ۲۷ متر است. حجم این هرم برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 25 \times 24 \times 27 = 2700$$

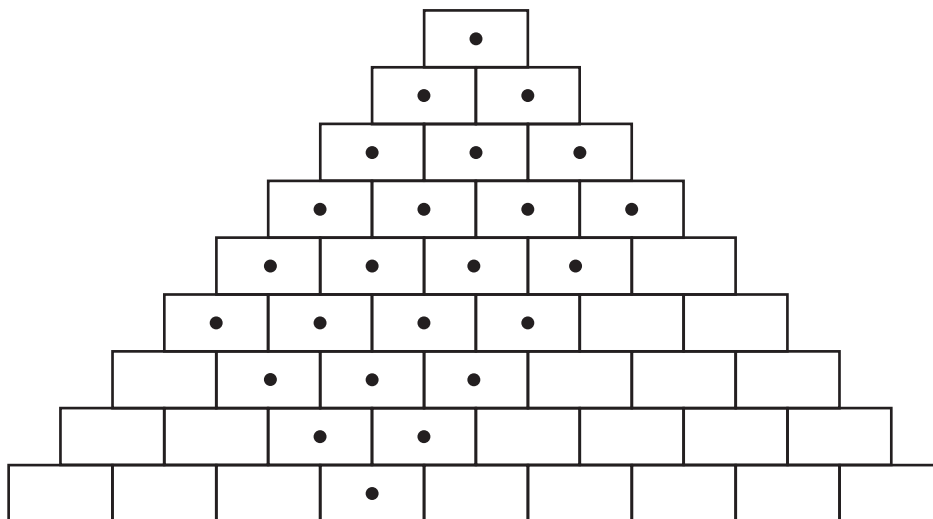
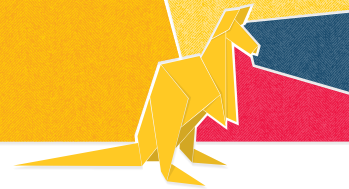
اما این حجم برابر 10% حجم کل کوه یخ است. پس حجم کوه یخ برابر است با $27000 = 2700 \times 10$. و طول ضلع مکعب برابر است با $\sqrt[3]{27000} = 30\text{m}$.

۲۹. (۳) از سطر دوم به بعد، در اولین خانه از سمت چپ در هر سطر، توان p_p ، یک واحد بیشتر از توان p_p در خانه سمت چپ سطر پایینی است. یعنی توان‌های p_p از سطر اول تا آخر، در اولین خانه سمت چپ به این شکل است:

$$1, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

می‌دانیم در سطر آخر، توان p_p برابر ۸ است. پس جدول در کل ۹ سطر دارد.

از طرفی هر سطر، یک خانه کمتر از سطر قبل دارد. پس سطر پایینی، ۹ خانه دارد. در شکل زیر، خانه‌هایی را که در آن‌ها مضرب p_p نوشته شده است، علامت زده‌ایم:



در این شکل ۲۴ خانه علامت خورده‌اند.

۳۰. (۳) دقت کنید که از هر شکل به جز شش ضلعی، دو رنگ داریم. پس تصویر مورد علاقه پدram، شش ضلعی نیست (زیرا اگر شش ضلعی باشد، بهمن می‌داند پدram کدام تصویر را دوست دارد).

ارشک از کجا می‌داند که این شکل، شش ضلعی نیست؟ برای این موضوع، لازم است رنگ شکل مورد علاقه پدram سفید نباشد (زیرا اگر رنگ مورد علاقه پدram سفید باشد، ارشک نمی‌تواند مطمئن باشد بهمن تصویر موردنظر را نمی‌داند).

تا الان بهمن می‌داند رنگ تصویر یا سیاه است یا خاکستری. اگر بداند شکل دایره است، باز هم نمی‌تواند تشخیص بدهد کدام یک از دایره‌ها مورد علاقه پدram است. به جز دایره، هر یک از شکل‌ها می‌تواند شکلی باشد که پدram به بهمن گفته است. زیرا در این صورت بهمن می‌تواند بفهمد پدram تصویر غیرسفیدرنگ را دوست دارد.

حالا ارشک هم می‌داند که شکل مورد علاقه پدram، دایره نیست. ولی از کجا می‌داند کدام تصویر مورد علاقه پدram است؟ اگر رنگی که ارشک می‌داند، سیاه باشد باز هم نمی‌تواند بفهمد پدram مربع سیاه را دوست دارد یا شش ضلعی سیاه را. پس حتماً رنگی که ارشک می‌داند، خاکستری است. تنها تصویر خاکستری باقی‌مانده در بین گزینه‌ها، مثلث خاکستری است.

2020
۱۴۰۰



ریاضیات کانگورو

دبیرخانه جشنواره ریاضیات کانگورو در ایران

تهران، میدان فاطمی، خیابان جویبار، خیابان میرهادی شرقی، پلاک ۱۴

تلفن: ۸۸۹۴۵۵۴۵ شماره: ۸۸۹۴۴۰۵۱

www.mathkangaroo.ir



@mathkangaroo.ir



@iranmathkangaroo